廊坊市重点中学 2023-2024 学年高三考前热身数学试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若 $0<a<b<1$，则 a^b，b^a，$\log_b a$，$\log_{\frac{1}{a}} b$ 的大小关系为（　　）

A. $a^b>b^a>\log_b a>\log_{\frac{1}{a}} b$　　**B.** $b^a>a^b>\log_{\frac{1}{a}} b>\log_b a$

C. $\log_b a>a^b>b^a>\log_{\frac{1}{a}} b$　　**D.** $\log_b a>b^a>a^b>\log_{\frac{1}{a}} b$

2．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1$，将 $f\left(x\right)$ 的图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标保持不变，再把所得图象向上平移 1 个单位长度，得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)=9$，则 $\left|x_1-x_2\right|$ 的值可能为（　　）

A. $\frac{5\pi}{4}$　　**B.** $\frac{3\pi}{4}$　　**C.** $\frac{\pi}{2}$　　**D.** $\frac{\pi}{3}$

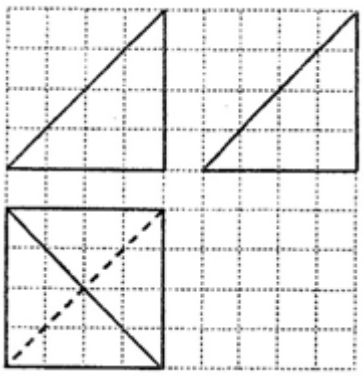
3．直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点且与抛物线交于 A，B 两点，则 $4|AF|+|BF|$ 的最小值是

A．10　　**B．9**　　**C．8**　　**D．7**

4．函数 $f\left(x\right)=ax-2$ 与 $g\left(x\right)=e^x$ 的图象上存在关于直线 $y=x$ 对称的点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{e}{4}\right]$　　**B.** $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　**C.** $\left(-\infty,e\right]$　　**D.** $\left(-\infty,e^2\right]$

5．某空间几何体的三视图如图所示（图中小正方形的边长为 1），则这个几何体的体积是（　　）



A. $\frac{32}{3}$　　**B.** $\frac{64}{3}$　　**C．16**　　**D．32**

6．“$\sin x=\frac{1}{2}$”是“$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．盒子中有编号为1，2，3，4，5，6，7的7个相同的球，从中任取3个编号不同的球，则取的3个球的编号的中位数恰好为5的概率是（　　）

A．$\frac{2}{35}$　　B．$\frac{8}{35}$　　C．$\frac{6}{35}$　　D．$\frac{3}{7}$

8．已知P与Q分别为函数$2x-y-6=0$与函数$y=x^2+1$的图象上一点，则线段$|PQ|$的最小值为(　　)

A．$\frac{6}{5}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　　D．6

9．已知定义在R上的函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，且$y=f(x-1)$的图象关于$x=1$对称，若实数a满足$f\left(\log_{\frac{1}{2}}a\right)<f(-2)$，则$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　C．$\left(\frac{1}{4},4\right)$　　D．$(4,+\infty)$

10．若集合$A=\{x|-1\le x\le 0\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}<0\right.\right\}$，则$A\cup B=$（　　）

A．$[-1,1)$　　B．$(-1,1]$　　C．$(-1,1)$　　D．$[-1,1]$

11．设$y=f(x)$是定义域为R的偶函数，且在$[0,+\infty)$单调递增，$a=\log_{0.2}0.3,b=\log_2 0.3$，则（　　）

A．$f(a+b)>f(ab)>f(0)$　　B．$f(a+b)>f(0)>f(ab)$

C．$f(ab)>f(a+b)>f(0)$　　D．$f(ab)>f(0)>f(a+b)$

12．已知复数$z=\frac{2i}{1-i}$，则z的共轭复数在复平面对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

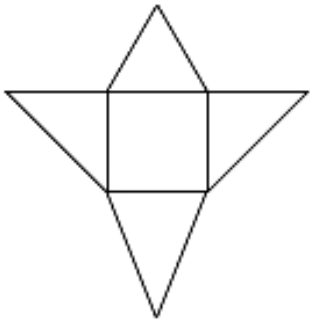
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=$（$2\sin 32°$，$2\cos 32°$），$\overrightarrow{BC}=$（$\cos 77°$，$-\cos 13°$），则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____，$\triangle ABC$的面积为_____.

14．在平面直角坐标系xOy中，若函数$f(x)=\ln x-ax$在$x=1$处的切线与圆C：$x^2-2x+y^2+1-a=0$存在公共点，则实数a的取值范围为_____.

15．如图，是一个四棱锥的平面展开图，其中间是边长为2

的正方形，上面三角形是等边三角形，左、右三角形是等腰直角三角形，则此四棱锥的体积为_____.



16．下表是关于青年观众的性别与是否喜欢综艺“奔跑吧，兄弟”的调查数据，人数如下表所示：

	不喜欢	喜欢
男性青年观众	**40**	**10**
女性青年观众	**30**	**80**

现要在所有参与调查的人中用分层抽样的方法抽取 n 个人做进一步的调研，若在“不喜欢的男性青年观众”的人中抽取了 **8** 人，则 n 的值为_____.

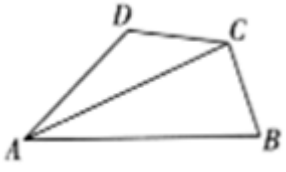
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $2n, a_n, 2S_n - a_n$ 成等差数列 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

（1）证明：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n = \dfrac{a_n + 1}{a_n a_{n+1}}$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

18．（12 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle D = 2\angle B$，$AD = 2DC = 4$，$\sin \angle B = \dfrac{3}{4}$.



（1）求 AC 的长；

（2）若 ΔABC 的面积为 **6**，求 $\sin \angle CAB \cdot \sin \angle ACB$ 的值.

19．（12 分）已知函数 $f(x) = a \ln x + x$ $(a \in \mathrm{R})$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对 $\forall x \in (0,+\infty)$，$f(x)-\mathrm{e}^{x}-ax<0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（12 分）追求人类与生存环境的和谐发展是中国特色社会主义生态文明的价值取向.为了改善空气质量，某城市环保局随机抽取了一年内 100 天的空气质量指数（*AQI*）的检测数据，结果统计如表：

AQI	$[0,50]$	$(50,100]$	$(100,150]$	$(150,200]$	$(200,250]$	$(250,300]$
空气质量	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	重度污染
天数	6	14	18	27	25	10

（1）从空气质量指数属于[0，50]，（50，100]的天数中任取 3 天，求这 3 天中空气质量至少有 2 天为优的概率；

（2）已知某企业每天因空气质量造成的经济损失 y（单位：元）与空气质量指数 x 的关系式为

$$y=\begin{cases}0, 9\le x\le 100\\ 220, 100<x\le 250\\ 1480, 250<x\le 300\end{cases}$$，假设该企业所在地 7 月与 8 月每天空气质量为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染的概率分别为 $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{6}$.9 月每天的空气质量对应的概率以表中 100 天的空气质量的频率代替.

（*i*）记该企业 9 月每天因空气质量造成的经济损失为 X 元，求 X 的分布列；

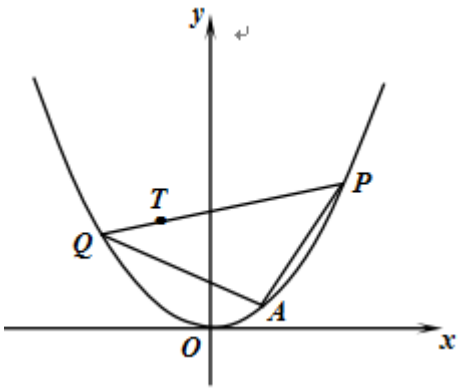
（*ii*）试问该企业 7 月、8 月、9 月这三个月因空气质量造成的经济损失总额的数学期望是否会超过 2.88 万元？说明你的理由.

21.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）．在以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$.

(1)写出直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程；

(2)若点 P 坐标为 $(3,\sqrt{5})$，圆 C 与直线 l 交于 A,B 两点，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

22.（10 分）已知三点 P,Q,A 在抛物线 $\Gamma: x^2=4y$ 上.



（Ⅰ）当点 A 的坐标为 $(2,1)$ 时，若直线 PQ 过点 $T(-2,4)$，求此时直线 AP 与直线 AQ 的斜率之积；

（Ⅱ）当 $AP \perp AQ$，且 $|AP|=|AQ|$ 时，求 $\triangle APQ$ 面积的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

因为 $0<a<b<1$，所以 $1>b^a>a^a>a^b>0$，

因为 $\log_b a>\log_b b>1$，$0<a<1$，所以 $\frac{1}{a}>1$，$\log_{\frac{1}{a}} b<0$.

综上 $\log_b a>b^a>a^b>\log_{\frac{1}{a}} b$；故选 D.

2、C

【解析】

利用二倍角公式与辅助角公式将函数 $y=f(x)$ 的解析式化简，然后利用图象变换规律得出函数 $y=g(x)$ 的解析式为 $g(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，可得函数 $y=g(x)$ 的值域为 $[-1,3]$，结合条件 $g(x_1)\cdot g(x_2)=9$，可得出 $g(x_1)$、$g(x_2)$ 均为函数 $y=g(x)$ 的最大值，于是得出 $|x_1-x_2|$ 为函数 $y=g(x)$ 最小正周期的整数倍，由此可得出正确选项.

【详解】

函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

将函数$y=f\left(x\right)$的图象上的所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，得$y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

再把所得图象向上平移1个单位，得函数$y=g\left(x\right)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)+1$的图象，易知函数$y=g\left(x\right)$的值域为$\left[-1,3\right]$.

若$g\left(x_1\right)\cdot g\left(x_2\right)=9$，则$g\left(x_1\right)=3$且$g\left(x_2\right)=3$，均为函数$y=g\left(x\right)$的最大值，

由$4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in Z\right)$，解得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in Z\right)$；

其中x_1、x_2是三角函数$y=g\left(x\right)$最高点的横坐标，

$\therefore\left|x_1-x_2\right|$的值为函数$y=g\left(x\right)$的最小正周期$T$的整数倍，且$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$．故选 **C**.

【点睛】

本题考查三角函数图象变换，同时也考查了正弦型函数与周期相关的问题，解题的关键在于确定$g\left(x_1\right)$、$g\left(x_2\right)$均为函数$y=g\left(x\right)$的最大值，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

3、B

【解析】

根据抛物线中过焦点的两段线段关系，可得$\frac{1}{\left|AF\right|}+\frac{1}{\left|BF\right|}=\frac{2}{p}=1$；再由基本不等式可求得$4\left|AF\right|+\left|BF\right|$的最小值.

【详解】

由抛物线标准方程可知 **p=2**

因为直线 **l** 过抛物线$y^2=4x$的焦点，由过抛物线焦点的弦的性质可知

$$\frac{1}{\left|AF\right|}+\frac{1}{\left|BF\right|}=\frac{2}{p}=1$$

所以$4\left|AF\right|+\left|BF\right|$

$$=\left(4\left|AF\right|+\left|BF\right|\right)\cdot\left(\frac{1}{\left|AF\right|}+\frac{1}{\left|BF\right|}\right)$$

$$=4+1+\left(\frac{\left|BF\right|}{\left|AF\right|}+\frac{4\left|AF\right|}{\left|BF\right|}\right)$$

因为$\left|AF\right|$、$\left|BF\right|$ 为线段长度，都大于 **0**，由基本不等式可知

$$4+1+\left(\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geq 5+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\times\frac{4|AF|}{|BF|}}$$

$\geq 5+2\times 2$

≥ 9，此时$|BF|=2|AF|$

所以选 B

【点睛】

本题考查了抛物线的基本性质及其简单应用，基本不等式的用法，属于中档题.

4、C

【解析】

由题可知，曲线$f(x)=ax-2$与$y=\ln x$有公共点，即方程$ax-2=\ln x$有解，可得$a=\frac{2+\ln x}{x}$有解，令$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$，则$h'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$，对$x$分类讨论，得出$x=\frac{1}{e}$时，$h(x)$取得极大值$h\left(\frac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，进而得出结论.

【详解】

解：由题可知，曲线$f(x)=ax-2$与$y=\ln x$有公共点，即方程$ax-2=\ln x$有解，

即$a=\frac{2+\ln x}{x}$有解，令$h(x)=\frac{2+\ln x}{x}$，则$h'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$，

则当$0<x<\frac{1}{e}$时，$h'(x)>0$；当$x>\frac{1}{e}$时，$h'(x)<0$，

故$x=\frac{1}{e}$时，$h(x)$取得极大值$h\left(\frac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，

当x趋近于0时，$h(x)$趋近于$-\infty$，所以$a\leq e$满足条件.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数性质的基本方法，考查化归与转化等数学思想，考查抽象概括、运算求解等数学能力，属于难题.

5、A

【解析】

几何体为一个三棱锥，高为 4，底面为一个等腰直角三角形，直角边长为 4，所以体积是$\frac{1}{3}\times 4\times\frac{1}{2}\times 4^2=\frac{32}{3}$，选 A.

6、B

【解析】

$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$，从而明确充分性与必要性.

【详解】

，

由 $\sin x=\frac{1}{2}$ 可得：$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 或 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$，

即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$ 能推出 $\sin x=\frac{1}{2}$，

但 $\sin x=\frac{1}{2}$ 推不出 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$

∴“$\sin x=\frac{1}{2}$”是“$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$”的必要不充分条件

故选 B

【点睛】

本题考查充分性与必要性，简单三角方程的解法，属于基础题.

7、B

【解析】

由题意，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的情况有 $C_4^1C_2^1$，所有的情况有 C_7^3 种，由古典概型的概率公式即得解.

【详解】

由题意，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的情况有 $C_4^1C_2^1$，所有的情况有 C_7^3 种

由古典概型，取的 3 个球的编号的中位数恰好为 5 的概率为：

$$P=\frac{C_4^1C_2^1}{C_7^3}=\frac{8}{35}$$

故选：B

【点睛】

本题考查了排列组合在古典概型中的应用，考查了学生综合分析，概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

8、C

【解析】

利用导数法和两直线平行性质，将线段 $|PQ|$ 的最小值转化成切点到直线距离.

【详解】

已知 P 与 Q 分别为函数 $2x-y-6=0$ 与函数 $y=x^2+1$ 的图象上一点，

可知抛物线 $y=x^2+1$ 存在某条切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，则 $k=2$，

设抛物线$y=x^2+1$的切点为$\left(x_0,x_0^2+1\right)$，则由$y'=2x$可得$2x_0=2$，

$\therefore x_0=1$，所以切点为$(1,2)$，

则切点$(1,2)$到直线$2x-y-6=0$的距离为线段$|PQ|$的最小值，

则$|PQ|_{\min}=\dfrac{|2\times1-2-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查导数的几何意义的应用，以及点到直线的距离公式的应用，考查转化思想和计算能力.

9、C

【解析】

根据题意，由函数的图象变换分析可得函数$y=f\left(x\right)$为偶函数，又由函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，分析可得$f\left(\log_{\frac{1}{2}}a\right)<f\left(-2\right)\Rightarrow f\left(\left|\log_2 a\right|\right)<f\left(2\right)\Rightarrow\left|\log_2 a\right|<2$，解可得$a$的取值范围，即可得答案.

【详解】

将函数$y=f\left(x-1\right)$的图象向左平移1个单位长度可得函数$y=f\left(x\right)$的图象，

由于函数$y=f\left(x-1\right)$的图象关于直线$x=1$对称，则函数$y=f\left(x\right)$的图象关于y轴对称，

即函数$y=f\left(x\right)$为偶函数，由$f\left(\log_{\frac{1}{2}}a\right)<f\left(-2\right)$，得$f\left(\left|\log_2 a\right|\right)<f\left(2\right)$，

Q函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，则$\left|\log_2 a\right|<2$，得$-2<\log_2 a<2$，解得$\dfrac{1}{4}<a<4$.

因此，实数a的取值范围是$\left(\dfrac{1}{4},4\right)$.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用函数的单调性与奇偶性解不等式，注意分析函数$y=f\left(x\right)$的奇偶性，属于中等题.

10、A

【解析】

用转化的思想求出B中不等式的解集，再利用并集的定义求解即可.

【详解】

解：由集合 $B=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}<0\right.\right\}$，解得 $B=\{x\,|\,0<x<1\}$，

则 $A\cup B=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 0\}\cup\{x\,|\,0<x<1\}=\{x\,|\,-1\leqslant x<1\}=[-1,1)$

故选：A.

【点睛】

本题考查了并集及其运算，分式不等式的解法，熟练掌握并集的定义是解本题的关键．属于基础题.

11、C

【解析】

根据偶函数的性质，比较 $|a+b|,|ab|$ 即可.

【详解】

解：$|a+b|=|\log_{0.2}0.3+\log_2 0.3|=\left|\frac{\lg 0.3}{\lg 0.2}+\frac{\lg 0.3}{\lg 2}\right|$

$=\left|\frac{\lg 0.3\times\lg\frac{5}{2}}{-\lg 5\times\lg 2}\right|=-\frac{\lg 0.3\times\lg\frac{5}{2}}{\lg 5\times\lg 2}$

$|ab|=|\log_{0.2}0.3\times\log_2 0.3|=\left|\frac{\lg 0.3}{\lg 0.2}\times\frac{\lg 0.3}{\lg 2}\right|$

$=\left|\frac{-\lg 0.3\times\lg 0.3}{\lg 5\times\lg 2}\right|=\frac{\lg 0.3\times\lg 0.3}{\lg 5\times\lg 2}$

$=\frac{-\lg 0.3\times(-\lg 0.3)}{\lg 5\times\lg 2}$

$=-\frac{\lg 0.3\times\lg\frac{10}{3}}{\lg 5\times\lg 2}$

显然 $\lg\frac{5}{2}<\lg\frac{10}{3}$，所以 $|a+b|<|ab|$

$y=f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(ab)>f(a+b)>f(0)$

故选：C

【点睛】

本题考查对数的运算及偶函数的性质，是基础题.

12、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/547131005143006115