

高考数学历年（2018–2022）真题按知识点分类（导数及其应用）练习

一、单选题

1. (2022·全国·统考高考真题) 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2 , 则 $f'(2)=$ ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. (2022·全国·统考高考真题) 函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 ()

- A. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2$ D. $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2$

3. (2022·全国·统考高考真题) 已知 $a=\frac{31}{32}, b=\cos\frac{1}{4}, c=4\sin\frac{1}{4}$, 则 ()

- A. $c>b>a$ B. $b>a>c$ C. $a>b>c$ D. $a>c>b$

4. (2022·全国·统考高考真题) 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上.

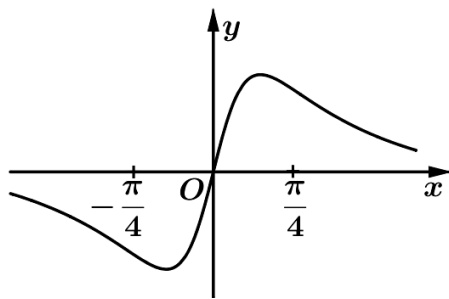
若该球的体积为 36π , 且 $3\leq l\leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 ()

- A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$ B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$ C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$ D. $[18, 27]$

5. (2022·全国·统考高考真题) 设 $a=0.1e^{0.1}, b=\frac{1}{9}, c=-\ln 0.9$, 则 ()

- A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $c<a<b$ D. $a<c<b$

6. (2021·浙江·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}, g(x)=\sin x$, 则图象为如图的函数可能是 ()



- A. $y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}$ B. $y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}$
C. $y=f(x)g(x)$ D. $y=\frac{g(x)}{f(x)}$

7. (2021·全国·统考高考真题) 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()

- A. $a<b$ B. $a>b$ C. $ab<a^2$ D. $ab>a^2$

8. (2021·全国·统考高考真题) 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线, 则 ()

A. $e^b < a$

B. $e^a < b$

C. $0 < a < e^b$

D. $0 < b < e^a$

9. (2020·全国·统考高考真题) 若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为 ()

A. $y=2x+1$

B. $y=2x+\frac{1}{2}$

C. $y=\frac{1}{2}x+1$

D. $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

10. (2020·全国·统考高考真题) 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()

A. $y=-2x-1$

B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$

D. $y=2x+1$

11. (2019·天津·高考真题) 已知 $a \in \mathbb{R}$, 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+2a, & x \leq 1, \\ x-a \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为

A. $[0,1]$

B. $[0,2]$

C. $[0,e]$

D. $[1,e]$

12. (2019·全国·高考真题) 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

13. (2019·全国·统考高考真题) 已知曲线 $y=ae^x+x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则

A. $a=e, b=-1$

B. $a=e, b=1$

C. $a=e^{-1}, b=1$

D. $a=e^{-1}, b=-1$

14. (2018·浙江·高考真题) 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且

$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$. 若 $a_1 > 1$, 则

A. $a_1 < a_3, a_2 < a_4$

B. $a_1 > a_3, a_2 < a_4$

C. $a_1 < a_3, a_2 > a_4$

D. $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

15. (2018·全国·高考真题) 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为()

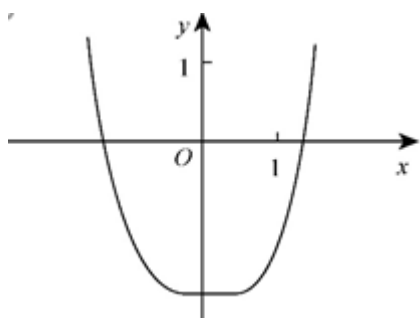
A. $y=-2x$

B. $y=-x$

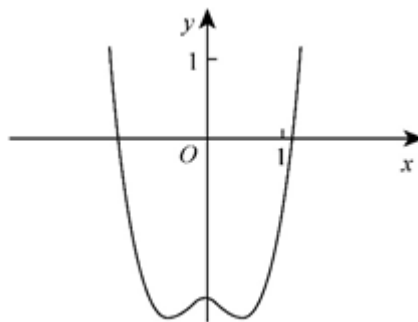
C. $y=2x$

D. $y=x$

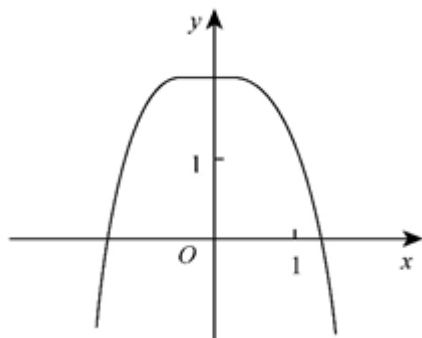
16. (2018·全国·高考真题) 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为



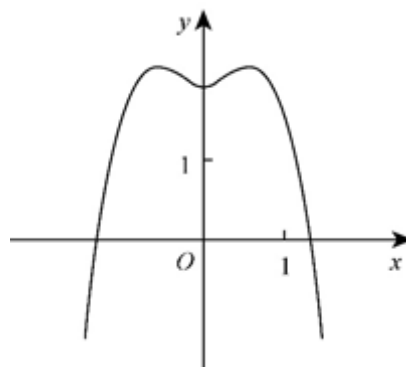
A.



B.



C.



D.

二、多选题

17. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 则 ()

- A. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减
- B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 有两个极值点
- C. 直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
- D. 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

18. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则 ()

- A. $f(x)$ 有两个极值点
- B. $f(x)$ 有三个零点
- C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

19. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记

$g(x) = f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$, $g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()

- A. $f(0) = 0$
- B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
- C. $f(-1) = f(4)$
- D. $g(-1) = g(2)$

三、填空题

20. (2022·全国·统考高考真题) 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且

$a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

21. (2022·全国·统考高考真题) 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.

22. (2021·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|, x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 取值范围是_____.

23. (2021·全国·统考高考真题) 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$: _____.

① $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数.

24. (2021·北京·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

- ① 若 $k = 0$, $f(x)$ 恰有 2 个零点;
- ② 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;
- ③ 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;
- ④ 存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

25. (2021·全国·统考高考真题) 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.

26. (2021·全国·统考高考真题) 函数 $f(x) = |2x-1| - 2\ln x$ 的最小值为_____.

27. (2020·江苏·统考高考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, A, B 是圆 $C: x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 36$ 上的两个动点, 满足 $PA = PB$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.

28. (2020·全国·统考高考真题) 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$. 若 $f'(1) = \frac{e}{4}$, 则 $a =$ _____.

29. (2020·全国·统考高考真题) 曲线 $y = \ln x + x + 1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为_____.

30. (2019·天津·高考真题) 曲线 $y = \cos x - \frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

31. (2019·全国·高考真题) 曲线 $y = 3(x^2 + x)e^x$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

32. (2019·江苏·高考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e, -1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是_____.

33. (2019·江苏·高考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的一

个动点, 则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是_____.

34. (2018·全国·高考真题) 曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 , 则

$a =$ _____.

35. (2018·全国·高考真题) 曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为_____.

36. (2018·江苏·高考真题) 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a \in \mathbf{R})$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

37. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

38. (2018·全国·高考真题) 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

39. (2018·天津·高考真题) 已知函数 $f(x)=e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.

四、解答题

40. (2022·天津·统考高考真题) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x)=e^x - a \sin x, g(x)=b\sqrt{x}$

(1)求函数 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)若 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有公共点,

(i) 当 $a=0$ 时, 求 b 的取值范围;

(ii) 求证: $a^2+b^2 > e$.

41. (2022·北京·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=e^x \ln(1+x)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2)设 $g(x)=f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

(3)证明: 对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s)+f(t)$.

42. (2022·浙江·统考高考真题) 设函数 $f(x)=\frac{e}{2x}+\ln x(x>0)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 曲线 $y=f(x)$ 上不同的三点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 处的切线都经过点 (a, b) . 证明:

(i) 若 $a > e$, 则 $0 < b - f(a) < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{e} - 1\right)$;

(ii) 若 $0 < a < e, x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\frac{2}{e} + \frac{e-a}{6e^2} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} < \frac{2}{a} - \frac{e-a}{6e^2}$.

(注: $e = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数)

43. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < -1$, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

44. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

45. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^2 + a$, 曲线 $y = f(x)$ 在点

$(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

(1) 若 $x_1 = -1$, 求 a ;

(2) 求 a 的取值范围.

46. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x + x - a$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < 1$.

47. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

48. (2022·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

49. (2021·天津·统考高考真题) 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - xe^x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 证明 $f(x)$ 存在唯一的极值点

(III) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 求实数 b 的取值范围.

50. (2021·全国·统考高考真题) 一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来, 设一个这种微生物为第 0 代, 经过一次繁殖后为第 1 代, 再经过一次繁殖后为第 2 代……, 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列, 设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下一代的个数, $P(X=i)=p_i(i=0,1,2,3)$.

(1) 已知 $p_0=0.4, p_1=0.3, p_2=0.2, p_3=0.1$, 求 $E(X)$;

(2) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率, p 是关于 x 的方程:

$p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3=x$ 的一个最小正实根, 求证: 当 $E(X)\leq 1$ 时, $p=1$, 当 $E(X)>1$

时, $p<1$;

(3) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

51. (2021·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 只有一个零点

① $\frac{1}{2}<a\leq\frac{e^2}{2}, b>2a$;

② $0<a<\frac{1}{2}, b\leq 2a$.

52. (2021·北京·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及其最大值与最小值.

53. (2021·浙江·统考高考真题) 设 a, b 为实数, 且 $a>1$, 函数 $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in\mathbb{R})$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对任意 $b>2e^2$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;

(3) 当 $a=e$ 时, 证明: 对任意 $b>e^4$, 函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , ($x_2>x_1$), 满足 $x_2>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1+\frac{e^2}{b}$.

(注: $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数)

54. (2021·全国·统考高考真题) 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F , 且 F 与圆

$M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

55. (2021·全国·统考高考真题) 设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$. 证明: $g(x) < 1$.

56. (2021·全国·高考真题) 设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

57. (2021·全国·统考高考真题) 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

58. (2021·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

59. (2021·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a, b 为两个不相等的正数, 且 $b \ln a - a \ln b = a - b$, 证明: $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

60. (2020·天津·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x (k \in R)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 当 $k = 6$ 时,

(i) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(ii) 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值;

(II) 当 $k \leq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有

$$\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

61. (2020·北京·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = 12 - x^2$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;

(II) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

62. (2020·浙江·统考高考真题) 已知 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$, 其中 $e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数.

(I) 证明: 函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点;

(II) 记 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 证明:

(i) $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$;

(ii) $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

63. (2020·海南·高考真题) 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

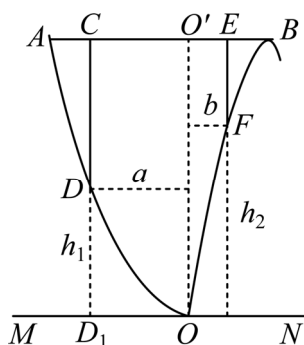
(1) 当 $a=e$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若不等式 $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

64. (2020·江苏·统考高考真题) 某地准备在山谷中建一座桥梁, 桥址位置的竖直截面图如图所示: 谷底 O 在水平线 MN 上, 桥 AB 与 MN 平行, OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上).

经测量, 左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米) 与 D 到 OO' 的距离 a (米) 之间满足关系式 $h_1 = \frac{1}{40}a^2$; 右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米) 与 F 到 OO' 的距离 b (米)

之间满足关系式 $h_2 = -\frac{1}{800}b^3 + 6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.



(1) 求桥 AB 的长度;

(2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF , 且 CE 为 80 米, 其中 C, E 在 AB 上 (不包括端点). 桥墩 EF 每米造价 k (万元)、桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$ (万元) ($k > 0$). 问 $O'E$ 为多少米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?

65. (2020·江苏·统考高考真题) 已知关于 x 的函数 $y=f(x), y=g(x)$ 与

$h(x)=kx+b(k,b\in\mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geq h(x)\geq g(x)$.

(1) 若 $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=-x^2+2x$, $D=(-\infty,+\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;

(2) 若 $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=k\ln x$, $h(x)=kx-k,D=(0,+\infty)$, 求 k 的取值范围;

(3) 若

$$f(x)=x^4-2x^2, g(x)=4x^2-8, h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2(0<|t|\leq\sqrt{2}),$$

$$D=[m,n]\subseteq[-\sqrt{2},\sqrt{2}], \text{求证: } n-m\leq\sqrt{7}.$$

66. (2020·全国·统考高考真题) 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 b .

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

67. (2020·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

68. (2020·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

69. (2020·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$, 求 a 的取值范围.

70. (2020·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=2\ln x+1$.

(1) 若 $f(x)\leq 2x+c$, 求 c 的取值范围;

(2) 设 $a>0$ 时, 讨论函数 $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性.

71. (2020·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x)=\sin^2x\sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)|\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\sin^2x\sin^2 2x\sin^2 4x\cdots\sin^2 2nx\leq\frac{3^n}{4^n}$.

72. (2019·天津·高考真题) 设函数 $f(x)=e^x\cos x, g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$;

(III) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 证明 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

73. (2019·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

74. (2019·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

75. (2019·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

76. (2019·全国·统考高考真题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 是否存在 a, b , 使得 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1? 若存在, 求出 a, b 的所有值; 若不存在, 说明理由.

77. (2019·浙江·高考真题) 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}, x > 0$.

(1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意 $x \in [\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注: $e = 2.71828\ldots$ 为自然对数的底数.

78. (2019·江苏·高考真题) 定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“ M -数列”.

(1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_2 a_4 = a_5, a_3 - 4a_2 + 4a_1 = 0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为“ M -数列”;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = 1, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

② 设 m 为正整数, 若存在“ M -数列” $\{c_n\}$, 对任意正整数 k , 当 $k \leq m$ 时, 都有 $c_k \leq b_k \leq c_{k+1}$

成立, 求 m 的最大值.

79. (2019·江苏·高考真题) 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$, $f(4)=8$, 求 a 的值;

(2) 若 $a \neq b$, $b=c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;

(3) 若 $a=0$, $0 < b, 1, c=1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.

80. (2019·北京·高考真题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;

(II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x-6 \leq f(x) \leq x$;

(III) 设 $F(x) = |f(x) - (x+a)|$ ($a \in \mathbf{R}$), 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$, 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

81. (2019·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 3$ 时, 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M , 最小值为 m , 求 $M-m$ 的取值范围.

82. (2019·天津·高考真题) 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $a \leq 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $0 < a < \frac{1}{e}$,

(i) 证明 $f(x)$ 恰有两个零点

(ii) 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明 $3x_0 - x_1 > 2$.

83. (2019·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = 2\sin x - x\cos x - x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 存在唯一零点;

(2) 若 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq ax$, 求 a 的取值范围.

84. (2018·北京·高考真题) 设函数 $f(x) = [ax^2 - (4a+1)x + 4a+3]e^x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a ;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

85. (2018·北京·高考真题) 设函数 $f(x) = [ax^2 - (3a+1)x + 3a+2]e^x$.

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 0, 求 a ;

(II) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

86. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

87. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)=\frac{ax^2+x-1}{e^x}$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.

88. (2018·浙江·高考真题) 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处导数相等, 证明: $f(x_1)+f(x_2) > 8-8\ln 2$;

(2) 若 $a \leq 3-4\ln 2$, 证明: 对于任意 $k > 0$, 直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

89. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1) 若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $f(x)$ 只有一个零点.

90. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a , 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

91. (2018·江苏·高考真题) 记 $f'(x), g'(x)$ 分别为函数 $f(x), g(x)$ 的导函数. 若存在

$x_0 \in R$, 满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S点”.

(1) 证明: 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S点”;

(2) 若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在“S点”, 求实数 a 的值;

(3) 已知函数 $f(x)=-x^2+a$, $g(x)=\frac{be^x}{x}$. 对任意 $a > 0$, 判断是否存在 $b > 0$, 使函

数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在“S点”, 并说明理由.

92. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a 的值.

93. (2018·天津·高考真题) 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

(I) 求函数 $h(x) = f(x) - x \ln a$ 的单调区间;

(II) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 证明: $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$;

(III) 证明: 当 $a \geq e^{\frac{1}{e}}$ 时, 存在直线 l , 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.

94. (2018·全国·高考真题) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

95. (2018·天津·高考真题) 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

(I) 若 $t_2 = 0, d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值;

(III) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.

五、双空题

96. (2022·全国·统考高考真题) 曲线 $y = \ln |x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为

_____, _____.

97. (2019·北京·高考真题) 设函数 $f(x) = ex + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____; 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是 _____.

参考答案:

1. B

【要点分析】根据题意可知 $f(1) = -2$, $f'(1) = 0$ 即可解得 a, b , 再根据 $f'(x)$ 即可解出.

【答案详解】因为函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 所以依题可知, $f(1) = -2$, $f'(1) = 0$, 而 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$, 所以 $b = -2, a - b = 0$, 即 $a = -2, b = -2$, 所以 $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增, 在 $(1, +\infty)$ 上递减, $x = 1$ 时取最大值, 满足题意, 即有 $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

故选: B.

2. D

【要点分析】利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间, 从而判断出 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值和最大值.

【答案详解】 $f'(x) = -\sin x + \sin x + (x+1)\cos x = (x+1)\cos x$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 上 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增;

在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调递减,

又 $f(0) = f(2\pi) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) + 1 = -\frac{3\pi}{2}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的最小值为 $-\frac{3\pi}{2}$, 最大值为 $\frac{\pi}{2} + 2$.

故选: D

3. A

【要点分析】由 $\frac{c}{b} = 4\tan\frac{1}{4}$ 结合三角函数的性质可得 $c > b$; 构造函数

$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in (0, +\infty)$, 利用导数可得 $b > a$, 即可得解.

【答案详解】[方法一]: 构造函数

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x < \tan x$

故 $\frac{c}{b} = 4\tan\frac{1}{4} > 1$, 故 $\frac{c}{b} > 1$, 所以 $c > b$;

设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in (0, +\infty)$,

$f'(x) = -\sin x + x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

故 $f\left(\frac{1}{4}\right) > f(0)=0$, 所以 $\cos\frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0$,

所以 $b > a$, 所以 $c > b > a$, 故选 A

[方法二]: 不等式放缩

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x < x$,

取 $x = \frac{1}{8}$ 得: $\cos\frac{1}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{8} > 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{31}{32}$, 故 $b > a$

$4\sin\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{4} = \sqrt{17}\sin\left(\frac{1}{4} + \varphi\right)$, 其中 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}$

当 $4\sin\frac{1}{4} + \cos\frac{1}{4} = \sqrt{17}$ 时, $\frac{1}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2}$, 及 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

此时 $\sin\frac{1}{4} = \cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\frac{1}{4} = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{17}}$

故 $\cos\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{17}} < \frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\frac{1}{4} < 4\sin\frac{1}{4}$, 故 $b < c$

所以 $b > a$, 所以 $c > b > a$, 故选 A

[方法三]: 泰勒展开

设 $x = 0.25$, 则 $a = \frac{31}{32} = 1 - \frac{0.25^2}{2}$, $b = \cos\frac{1}{4} \approx 1 - \frac{0.25^2}{2} + \frac{0.25^4}{4!}$,

$c = 4\sin\frac{1}{4} = \frac{\sin\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \approx 1 - \frac{0.25^2}{3!} + \frac{0.25^4}{5!}$, 计算得 $c > b > a$, 故选 A.

[方法四]: 构造函数

因为 $\frac{c}{b} = 4\tan\frac{1}{4}$, 因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x < x < \tan x$, 所以 $\tan\frac{1}{4} > \frac{1}{4}$, 即 $\frac{c}{b} > 1$, 所以 $c > b$; 设

$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = -\sin x + x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则

$f\left(\frac{1}{4}\right) > f(0)=0$, 所以 $\cos\frac{1}{4} - \frac{31}{32} > 0$, 所以 $b > a$, 所以 $c > b > a$,

故选: A.

[方法五]: 【最优解】不等式放缩

因为 $\frac{c}{b} = 4\tan\frac{1}{4}$, 因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x < x < \tan x$, 所以 $\tan\frac{1}{4} > \frac{1}{4}$, 即 $\frac{c}{b} > 1$, 所以 $c > b$; 因

为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x < x$, 取 $x = \frac{1}{8}$ 得 $\cos\frac{1}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{8} > 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{31}{32}$, 故 $b > a$, 所以 $c > b > a$.

故选：A.

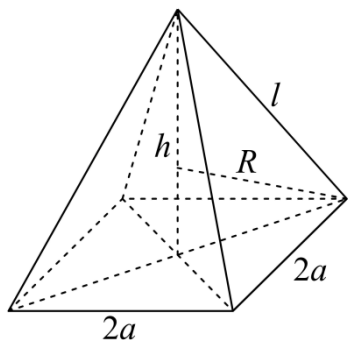
【整体点评】方法4：利用函数的单调性比较大小，是常见思路，难点在于构造合适的函数，属于通性通法；

方法5：利用二倍角公式以及不等式 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x < x < \tan x$ 放缩，即可得出大小关系，属于最优解.

4. C

【要点分析】设正四棱锥的高为 h ，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【答案详解】 $\because$ 球的体积为 36π ，所以球的半径 $R=3$ ，



[方法一]：导数法

设正四棱锥的底面边长为 $2a$ ，高为 h ，

$$\text{则 } l^2 = 2a^2 + h^2, \quad 3^2 = 2a^2 + (3-h)^2,$$

$$\text{所以 } 6h = l^2, \quad 2a^2 = l^2 - h^2$$

$$\text{所以正四棱锥的体积 } V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4a^2 \times h = \frac{2}{3} \times \left(l^2 - \frac{l^4}{36}\right) \times \frac{l^2}{6} = \frac{1}{9} \left(l^4 - \frac{l^6}{36}\right),$$

$$\text{所以 } V' = \frac{1}{9} \left(4l^3 - \frac{l^5}{6}\right) = \frac{1}{9} l^3 \left(\frac{24-l^2}{6}\right),$$

当 $3 \leq l \leq 2\sqrt{6}$ 时， $V' > 0$ ，当 $2\sqrt{6} < l \leq 3\sqrt{3}$ 时， $V' < 0$ ，

所以当 $l = 2\sqrt{6}$ 时，正四棱锥的体积 V 取最大值，最大值为 $\frac{64}{3}$ ，

$$\text{又 } l=3 \text{ 时， } V = \frac{27}{4}, \quad l=3\sqrt{3} \text{ 时， } V = \frac{81}{4},$$

所以正四棱锥的体积 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$,

所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$.

故选: C.

[方法二]: 基本不等式法

由方法一故所以 $V = \frac{4}{3}a^2h = \frac{2}{3}(6h - h^2)h = \frac{1}{3}(12 - 2h)h \times h$, $\frac{1}{3} \times \left[\frac{(12 - 2h) + h + h}{3} \right]^3 = \frac{64}{3}$ (当且

仅当 $h = 4$ 取到),

当 $h = \frac{3}{2}$ 时, 得 $a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, 则 $V_{\min} = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$;

当 $l = 3\sqrt{3}$ 时, 球心在正四棱锥高线上, 此时 $h = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, 正四棱锥体积 $V_1 = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{9}{2} = \frac{81}{4} < \frac{64}{3}$, 故该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$.

5. C

【要点分析】构造函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 导数判断其单调性, 由此确定 a, b, c 的大小.

【答案详解】方法一: 构造法

设 $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$, 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

所以 $f\left(\frac{1}{9}\right) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{10}{9} - \frac{1}{9} < 0$, 故 $\frac{1}{9} > \ln \frac{10}{9} = -\ln 0.9$, 即 $b > c$,

所以 $f\left(-\frac{1}{10}\right) < f(0) = 0$, 所以 $\ln \frac{9}{10} + \frac{1}{10} < 0$, 故 $\frac{9}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$, 所以 $\frac{1}{10} e^{\frac{1}{10}} < \frac{1}{9}$,

故 $a < b$,

设 $g(x) = x e^x + \ln(1-x) (0 < x < 1)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x + 1}{x-1}$,

令 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$, $h'(x) = e^x(x^2+2x-1)$,

当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递减,

当 $\sqrt{2}-1 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递增,

又 $h(0)=0$,

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $h(x) < 0$,

所以当 $0 < x < \sqrt{2}-1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ 单调递增,

所以 $g(0.1) > g(0) = 0$, 即 $0.1e^{0.1} > -\ln 0.9$, 所以 $a > c$

故选: C.

方法二: 比较法

解: $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{0.1}{1-0.1}$, $c = -\ln(1-0.1)$,

① $\ln a - \ln b = 0.1 + \ln(1-0.1)$,

令 $f(x) = x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]$,

则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 0.1]$ 上单调递减,

可得 $f(0.1) < f(0) = 0$, 即 $\ln a - \ln b < 0$, 所以 $a < b$;

② $a - c = 0.1e^{0.1} + \ln(1-0.1)$,

令 $g(x) = xe^x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]$,

则 $g'(x) = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x}$,

令 $k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1$, 所以 $k'(x) = (1-x^2-2x)e^x > 0$,

所以 $k(x)$ 在 $(0, 0.1]$ 上单调递增, 可得 $k(x) > k(0) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 0.1]$ 上单调递增, 可得 $g(0.1) > g(0) = 0$, 即 $a - c > 0$, 所以 $a > c$.

故 $c < a < b$.

6. D

【要点分析】由函数的奇偶性可排除 A、B, 结合导数判断函数的单调性可判断 C, 即可得解.

【答案详解】对于 A, $y = f(x) + g(x) - \frac{1}{4} = x^2 + \sin x$, 该函数为非奇非偶函数, 与函数图象不符, 排除 A;

对于 B, $y = f(x) - g(x) - \frac{1}{4} = x^2 - \sin x$, 该函数为非奇非偶函数, 与函数图象不符, 排除 B;

对于 C, $y = f(x)g(x) = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\sin x$, 则 $y' = 2x\sin x + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\cos x$,

当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $y' = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 与图象不符, 排除 C.

故选: D.

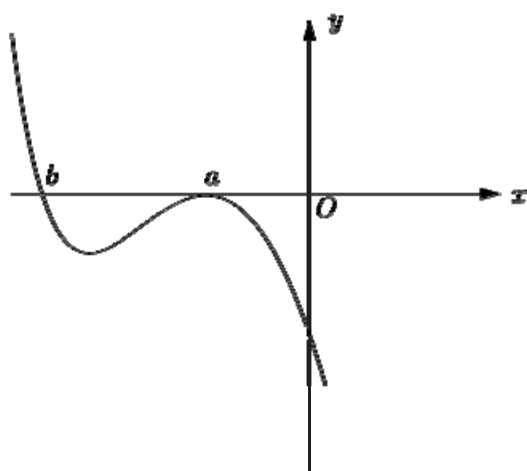
7. D

【要点分析】先考虑函数的零点情况, 注意零点左右附近函数值是否变号, 结合极大值点的性质, 对 a 进行分类讨论, 画出 $f(x)$ 图象, 即可得到 a, b 所满足的关系, 由此确定正确选项.

【答案详解】若 $a = b$, 则 $f(x) = a(x-a)^3$ 为单调函数, 无极值点, 不符合题意, 故 $a \neq b$.

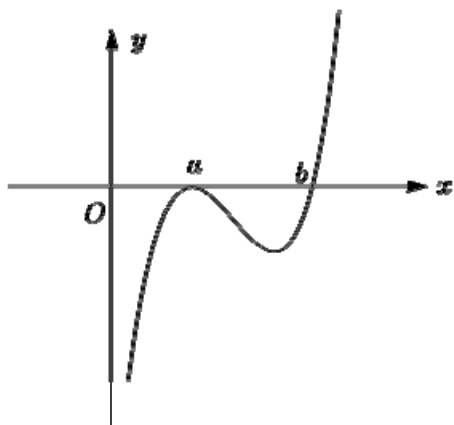
$\therefore f(x)$ 有 $x = a$ 和 $x = b$ 两个不同零点, 且在 $x = a$ 左右附近是不变号, 在 $x = b$ 左右附近是变号的. 依题意, $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, $\therefore$ 在 $x = a$ 左右附近都是小于零的.

当 $a < 0$ 时, 由 $x > b$, $f(x) \leq 0$, 画出 $f(x)$ 的图象如下图所示:



由图可知 $b < a$, $a < 0$, 故 $ab > a^2$.

当 $a > 0$ 时, 由 $x > b$ 时, $f(x) > 0$, 画出 $f(x)$ 的图象如下图所示:



由图可知 $b > a$, $a > 0$, 故 $ab > a^2$.

综上所述, $ab > a^2$ 成立.

故选: D

【名师点睛】本小题主要考查三次函数的图象与性质, 利用数形结合的数学思想方法可以快速解答.

8. D

【要点分析】解法一: 根据导数几何意义求得切线方程, 再构造函数, 利用导数研究函数图象, 结合图形确定结果;

解法二: 画出曲线 $y = e^x$ 的图象, 根据直观即可判定点 (a, b) 在曲线下和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

【答案详解】在曲线 $y = e^x$ 上任取一点 $P(t, e^t)$, 对函数 $y = e^x$ 求导得 $y' = e^x$,

所以, 曲线 $y = e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y - e^t = e^t(x - t)$, 即 $y = e^t x + (1 - t)e^t$,

由题意可知, 点 (a, b) 在直线 $y = e^t x + (1 - t)e^t$ 上, 可得 $b = ae^t + (1 - t)e^t = (a + 1 - t)e^t$,

令 $f(t) = (a + 1 - t)e^t$, 则 $f'(t) = (a - t)e^t$.

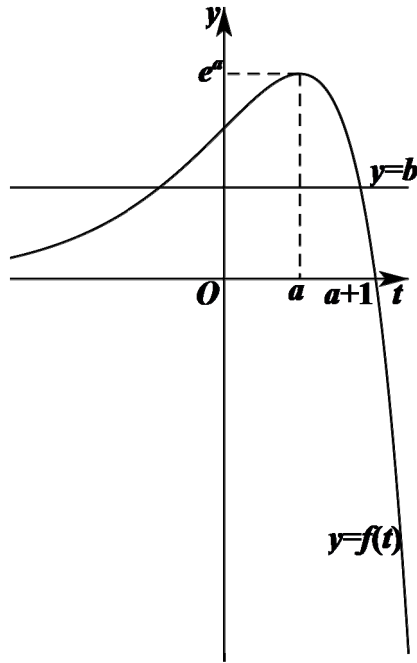
当 $t < a$ 时, $f'(t) > 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调递增,

当 $t > a$ 时, $f'(t) < 0$, 此时函数 $f(t)$ 单调递减,

所以, $f(t)_{\max} = f(a) = e^a$,

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b < f(t)_{\max} = e^a$ ，

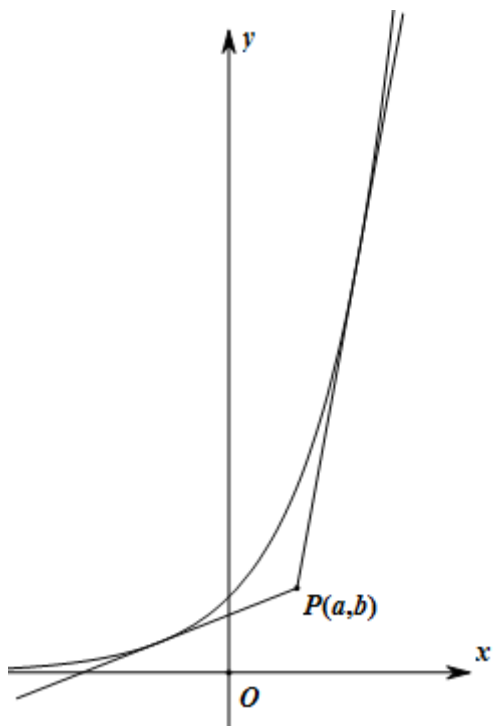
当 $t < a+1$ 时， $f(t) > 0$ ，当 $t > a+1$ 时， $f(t) < 0$ ，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当 $0 < b < e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点.

故选：D.

解法二：画出函数曲线 $y=e^x$ 的图象如图所示，根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.由此可知 $0 < b < e^a$.



故选：D.

【名师点睛】解法一是严格的证明求解方法，其中的极限处理在中学知识范围内需要用到指数函数的增长特性进行估计，解法二是根据基于对指数函数的图象的清晰的理解与认识的基础上，直观解决问题的有效方法.

9. D

【要点分析】根据导数的几何意义设出直线 l 的方程，再由直线与圆相切的性质，即可得出答案.

【答案详解】设直线 l 在曲线 $y = \sqrt{x}$ 上的切点为 $(x_0, \sqrt{x_0})$ ，则 $x_0 > 0$ ，

函数 $y = \sqrt{x}$ 的导数为 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ，则直线 l 的斜率 $k = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ，

设直线 l 的方程为 $y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$ ，即 $x - 2\sqrt{x_0}y + x_0 = 0$ ，

由于直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$ 相切，则 $\frac{x_0}{\sqrt{1+4x_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，

两边平方并整理得 $5x_0^2 - 4x_0 - 1 = 0$, 解得 $x_0 = 1$, $x_0 = -\frac{1}{5}$ (舍),

则直线 l 的方程为 $x - 2y + 1 = 0$, 即 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

故选: D.

【名师点睛】本题主要考查了导数的几何意义的应用以及直线与圆的位置的应用, 属于中档题.

10. B

【要点分析】求得函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$, 计算出 $f(1)$ 和 $f'(1)$ 的值, 可得出所求切线的点斜式方程, 化简即可.

【答案详解】 $\because f(x) = x^4 - 2x^3$, $\therefore f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $\therefore f(1) = -1$, $f'(1) = -2$,

因此, 所求切线的方程为 $y + 1 = -2(x - 1)$, 即 $y = -2x + 1$.

故选: B.

【名师点睛】本题考查利用导数求解函数图象的切线方程, 考查计算能力, 属于基础题

11. C

【解析】先判断 $a \geq 0$ 时, $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立; 若 $x - a \ln x \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 转化为 $a \leq \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

【答案详解】 $\because f(0) \geq 0$, 即 $a \geq 0$,

(1) 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 2a = (x - a)^2 + 2a - a^2 \geq 2a - a^2 = a(2 - a) > 0$,

当 $a > 1$ 时, $f(1) = 1 > 0$,

故当 $a \geq 0$ 时, $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立;

若 $x - a \ln x \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$,

当 $x > e$, 函数单增, 当 $0 < x < e$, 函数单减,

故 $g(x)_{\min} = g(e) = e$, 所以 $a \leq e$. 当 $a \geq 0$ 时, $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立;

综上所述, a 的取值范围是 $[0, e]$,

故选 C.

【名师点睛】本题考查分段函数的最值问题, 关键利用求导的方法研究函数的单调性, 进行

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/54802412700006063>