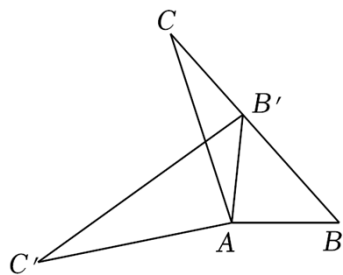


专题 23.1 图形的旋转（专项拔高卷）

考试时间：90 分钟 试卷满分：100 分 难度：0.51

一. 选择题（共 10 小题，满分 20 分，每小题 2 分）

1. （2 分）（2023•二道区校级模拟）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=108^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转得到 $\triangle AB'C'$ 。若点 B' 恰好落在 BC 边上，且 $AB=CB'$ ，则 $\angle C'$ 的度数为（ ）



- A. 18° B. 20° C. 24° D. 28°

解： $\because AB' = CB'$ ，

$$\therefore \angle C = \angle CAB'$$
，

$$\therefore \angle AB'B = \angle C + \angle CAB' = 2\angle C,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转得到 $\triangle AB'C'$ ，

$$\therefore \angle C = \angle C', \quad AB = AB',$$

$$\therefore \angle B = \angle AB'B = 2\angle C,$$

$$\because \angle B + \angle C + \angle CAB = 180^\circ,$$

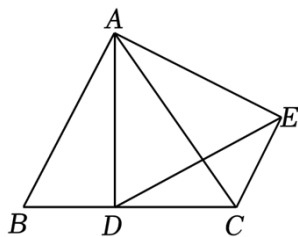
$$\therefore 3\angle C = 180^\circ - 108^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle C' = \angle C = 24^\circ,$$

故选：C.

2. （2 分）（2023•赛罕区二模）如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 是 BC 的中点。将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$ 那么下列结论正确的是（ ）



- A. $AB=AE$ B. $AB \parallel EC$ C. $\angle ABC = \angle DAE$ D. $DE \perp AC$

解：∵ $AB=AC$ ，点 D 是 BC 的中点.

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

由旋转可得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$$\therefore AD = AE, \quad \angle BAD = \angle CAE,$$

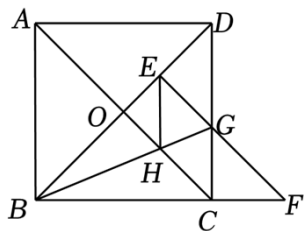
$$\therefore \angle CAD = \angle CAE,$$

$$\therefore AC \perp DE,$$

所以 D 对

故答案选：D.

3. (2分) (2023春•荆门期末) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，将 $\triangle ABD$ 绕 B 点顺时针旋转 45° 得到 $\triangle BEF$ ， EF 交 CD 于点 G 连接 BG 交 AC 于 H ，连接 EH 。则下列结论：① $EG=CG=CF$ ；② 四边形 $EHCG$ 是菱形；③ $\triangle BDG$ 的面积是 $16-8\sqrt{2}$ ；④ $OE=4-2\sqrt{2}$ ；其中正确的是 ()



- A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ①②③④

解：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AB = BC, \quad \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle DBC = \angle ADB = \angle BCA = 45^\circ.$$

由旋转可知 $AB = BE$ ， $\angle BEG = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle GFB = \angle ADB = 45^\circ$ ，

$$\therefore BE = BC, \quad \angle BEG = \angle BCG = \angle GCF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle CFG$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore CF = CG.$$

$$\therefore BG = BG,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BEG \cong \text{Rt} \triangle BCG \text{ (HL)},$$

$$\therefore EG=CG,$$

$\therefore EG=CG=CF$, 故①正确;

$$\because \triangle BEG \cong \triangle BCG,$$

$$\therefore \angle EBH = \angle CBH = 22.5^\circ.$$

$$\text{又} \because BE=BC, BH=BH,$$

$$\therefore \triangle EBH \cong \triangle CBH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EH=CH.$$

$$\because \angle CHG = \angle CBH + \angle BCA = 22.5^\circ + 45^\circ = 67.5^\circ, \angle BGC = 90^\circ - \angle CBH = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CHG = \angle BGC,$$

$$\therefore CH=CG,$$

$$\therefore EH=CH=CG=EG,$$

$\therefore$ 四边形 $EHCG$ 为菱形, 故②正确;

$$\because \angle BEF = 90^\circ, \angle EDG = 45^\circ,$$

$$\therefore EG = \frac{\sqrt{2}}{2} DG,$$

$$\therefore CG = \frac{\sqrt{2}}{2} DG.$$

$$\because CD = CG + DG = 4,$$

$$\therefore DG = 8 - 4\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BDG} = \frac{1}{2} DG \cdot BC = \frac{1}{2} \times (8 - 4\sqrt{2}) \times 4 = 16 - 8\sqrt{2}, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{根据正方形的性质可求出 } OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} BC = 2\sqrt{2},$$

$$\because DG = 8 - 4\sqrt{2},$$

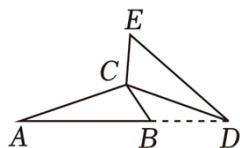
$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2}}{2} DG = \frac{\sqrt{2}}{2} (8 - 4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 4,$$

$$\therefore OE = OD - DE = 2\sqrt{2} - (4\sqrt{2} - 4) = 4 - 2\sqrt{2}, \text{ 故④正确;}$$

综上所述, 正确的为①②③④.

故选: D .

4. (2分) (2023•河西区模拟) 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), 得到 $\triangle CDE$, 这时点 A 旋转后的对应点 D 恰好在直线 AD 上, 则下列结论不一定正确的是 ()



A. $\angle CBD = \angle ECD$

B. $\angle CAB = \angle CDB$

C. $\angle ECB = \alpha$

D. $\angle EDB = 180^\circ - \alpha$

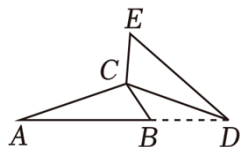
解：∵将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，得到 $\triangle CDE$ ，

∴ $\angle CBD = \angle ECD$ ， $\angle CAB = \angle CDB$ ， $\angle ECB = \alpha$ ， $\angle E = \angle ABC$ ，故 A 选项符合题意， B 选项和 C 选项不符合题意，

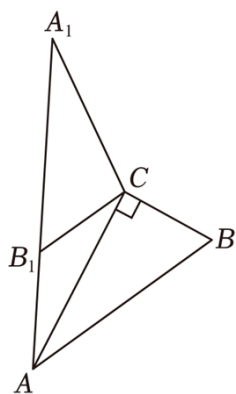
∴ $\angle E + \angle DBC = \angle ABC + \angle DBC = 180^\circ$ ，

∴ $\angle EDB = 360^\circ - \angle BCE - (\angle E + \angle DBC) = 180^\circ - \alpha$ ，故 D 选项不符合题意，

故选： A 。



5. (2分) (2023春•昌江区校级期中) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 8$ ，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\text{Rt}\triangle A_1B_1C$ ，当 A_1 ， B_1 ， A 三点共线时， AA_1 的值为 ()



A. 12

B. $8\sqrt{3}$

C. $6\sqrt{3}$

D. $8+4\sqrt{3}$

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 8$ ，

∴ $\angle BAC = 30^\circ$ ，则 $BC = \frac{1}{2}AB = 4$ ，

∵将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\text{Rt}\triangle A_1B_1C$ ，

∴ $\angle A_1B_1C = \angle ABC = 60^\circ$ ， $B_1C = BC = 4$ ， $CA = CA_1$ ， $A_1B_1 = AB$ ， $\angle A_1 = \angle CAB = 30^\circ$ ，

∵ $CA = CA_1$ ，

∴ $\angle CA_1B_1 = \angle CAA_1 = 30^\circ$ ，

$\because A_1, B_1, A$ 三点共线,

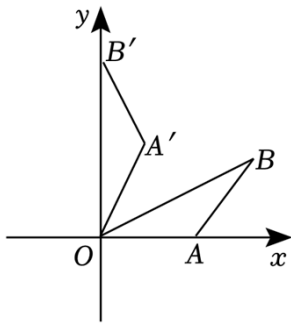
$$\therefore \angle ACB_1 = \angle A_1B_1C - \angle A_1AC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore B_1A = BC = 4,$$

$$\therefore AA_1 = AB_1 + A_1B_1 = 4 + 8 = 12,$$

故选: A.

6. (2分) (2023春•太仓市期末) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $A(5, 0)$, 点 $B(8, 4)$. 若将线段 AB 绕点 O 逆时针旋转得到线段 $A'B'$, 当点 B' 恰好落在 y 轴正半轴上时, 点 A' 的坐标为 ()



- A. $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ B. $(\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{10}{3})$ C. $(2, 2\sqrt{5})$ D. $(3, 5)$

解: 过点 B 作 $BN \perp x$ 轴, 过点 A 作 $AM \perp OB$ 于 M , 过点 A' 作 $A'M' \perp y$ 轴,

$$\therefore \angle BNO = 90^\circ,$$

$$\because \text{点 } A(5, 0), \text{ 点 } B(8, 4),$$

$$\therefore OA = AB = 5, \text{ 点 } B \text{ 到 } x \text{ 轴的距离为 } 4,$$

$$\therefore AN = 3,$$

$$\therefore ON = 8,$$

$$\therefore OB = \sqrt{ON^2 + BN^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\because \angle ONB = \angle AMO = 90^\circ, \angle AOM = \angle BON,$$

$$\therefore \triangle AOM \sim \triangle BON,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AM}{BN} = \frac{OM}{ON},$$

$$\text{即 } \frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{AM}{4} = \frac{OM}{8},$$

$$\therefore AM = \sqrt{5}, OM = 2\sqrt{5},$$

$\because$ 将线段 AB 绕点 O 逆时针旋转得到线段 $A'B'$,

$$\therefore OA = OA', \angle AOB = \angle A'OB',$$

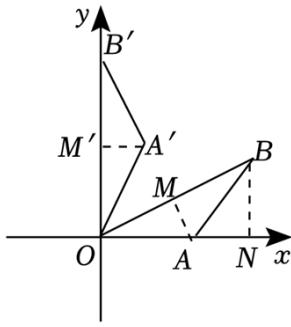
$$\because \angle AMO = \angle A' M' O = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle A' OM' \quad (AAS),$$

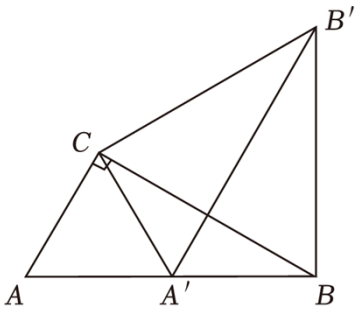
$$\therefore OM' = OM = 2\sqrt{5}, \quad A' M' = AM = \sqrt{5},$$

$$\therefore A' (\sqrt{5}, 2\sqrt{5}),$$

故选：A.



7. (2分) (2023春•新城区校级期末) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A' B' C'$ ，此时点 A' 恰好落在 AB 边上，则点 B' 与点 B 之间的距离为 ()



- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 2

解：由旋转性质得 $AC = A' C$ ， $BC = B' C$ ， $\angle B' CB = \angle A' CA$ ，

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACA'$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle A' CA = 60^\circ, \text{ 则 } \angle B' CB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BCB'$ 是等边三角形，

$$\therefore BB' = BC,$$

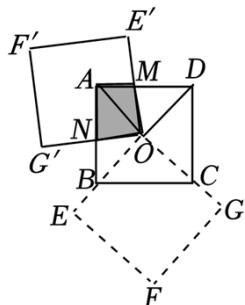
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 即 } BB' = 2\sqrt{3},$$

故选：B.

8. (2分) (2023春•德州期中) 边长相等的两个正方形 $ABCD$ 和 $OEFG$ 如图所示，若将正方形 $OEFG$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 120° ，在旋转的过程中，两个正方形重叠部分四边形 $OMAN$ 的面积 ()



- A. 先增大再减小
B. 先减小再增大
C. 不断增大
D. 不变

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \angle DAO = \angle ABO = 45^\circ, OA = \frac{1}{2}AC, OB = \frac{1}{2}BD, AC = BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

旋转得：四边形 $OE'F'G'$ 是正方形，

$$\therefore \angle E'OG' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E'OG' = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E'OG' - \angle AON = \angle AOB - \angle AON,$$

$$\therefore \angle BON = \angle AOM,$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \text{四边形 } OMAN \text{ 的面积} = \triangle AON \text{ 的面积} + \triangle AOM \text{ 的面积}$$

$$= \triangle AON \text{ 的面积} + \triangle BON \text{ 的面积}$$

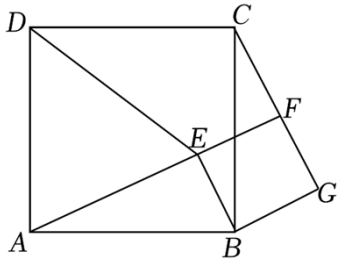
$$= \triangle AOB \text{ 的面积}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ 正方形 } ABCD \text{ 的面积},$$

∴ 在旋转的过程中，两个正方形重叠部分 $OMAN$ 的面积不变，

故选：D.

9. (2分) (2023春•遂平县期末) 如图，点 E 为正方形 $ABCD$ 内一点， $\angle AEB = 90^\circ$ ，将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle CBG$ 。延长 AE 交 CG 于点 F ，连接 DE 。下列结论：① $AF \perp CG$ ，② 四边形 $BEFG$ 是正方形，③ 若 $DA = DE$ ，则 $CF = FG$ ；其中正确的结论是 ()



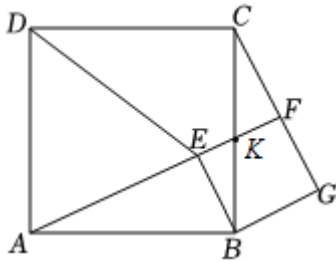
A. ①②③

B. ①②

C. ②③

D. ①③

解：设 AF 交 BC 于 K ，如图：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ABK = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle KAB + \angle AKB = 90^\circ$ ，

$\because$ 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ，得到 $\triangle CBG$ ，

$\therefore \angle KAB = \angle BCG$ ，

$\because \angle AKB = \angle CKF$ ，

$\therefore \angle BCG + \angle CKF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle KFC = 90^\circ$ ，

$\therefore AF \perp CG$ ，故①正确；

$\because$ 将 $\text{Rt}\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° ，

$\therefore \angle AEB = \angle CGB = 90^\circ$ ， $BE = BG$ ， $\angle EBG = 90^\circ$ ，

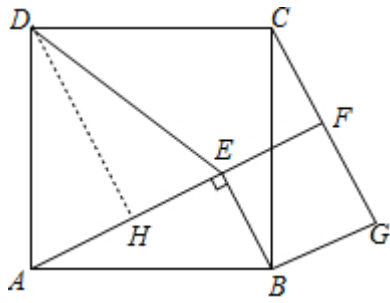
又 $\because \angle BEF = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BEFG$ 是矩形，

又 $\because BE = BG$ ，

$\therefore$ 四边形 $BEFG$ 是正方形，故②正确；

如图，过点 D 作 $DH \perp AE$ 于 H ，



$\because DA=DE, DH\perp AE,$

$$\therefore AH=\frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore \angle ADH+\angle DAH=90^{\circ},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD=AB, \angle DAB=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle DAH+\angle EAB=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle ADH=\angle EAB,$$

又 $\because AD=AB, \angle AHD=\angle AEB=90^{\circ},$

$$\therefore \triangle ADH\cong \triangle BAE (AAS),$$

$$\therefore AH=BE=\frac{1}{2}AE,$$

$\because$ 将 $Rt\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 $90^{\circ},$

$$\therefore AE=CG,$$

$\because$ 四边形 $BEFG$ 是正方形,

$$\therefore BE=GF,$$

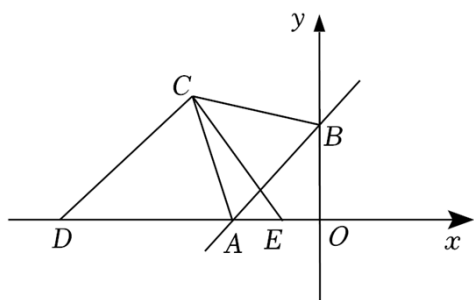
$$\therefore GF=\frac{1}{2}CG,$$

$$\therefore CF=FG, \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore \text{正确的有: ①②③,}$$

故选: A .

10. (2分) (2023春•凤城市期中) 如图, 已知直线 $y=kx+2k$ 交 x 、 y 轴于 A 、 B 两点, 以 AB 为边作等边 $\triangle ABC$ (A 、 B 、 C 三点逆时针排列), D 、 E 两点坐标分别为 $(-6, 0)$ 、 $(-1, 0)$, 连接 CD 、 CE , 则 $CD+CE$ 的最小值为 ()



A. 6

B. $5+\sqrt{3}$

C. 6.5

D. 7

解：∵点 B 在直线 $y=kx+2k$ 上，

$$\therefore k(x+2)=0,$$

$$\because k \neq 0,$$

$$\therefore x+2=0.,$$

$$\therefore x=-2$$

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\because E(-1, 0), D(-6, 0),$$

在 x 轴上方作等边 $\triangle AOF$,

$$\because \angle CAB = \angle FAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle BAF = \angle BAF + \angle FAO, \text{ 即 } \angle CAF = \angle BAO,$$

又 $\because CA = BA, AF = AO,$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AFC (SAS),$$

$$\therefore \angle AFC = \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 C 的轨迹为定直线 CF ,

作点 E 关于直线 CF 的对称点 E' , 连接 CE' , $CE = CE'$,

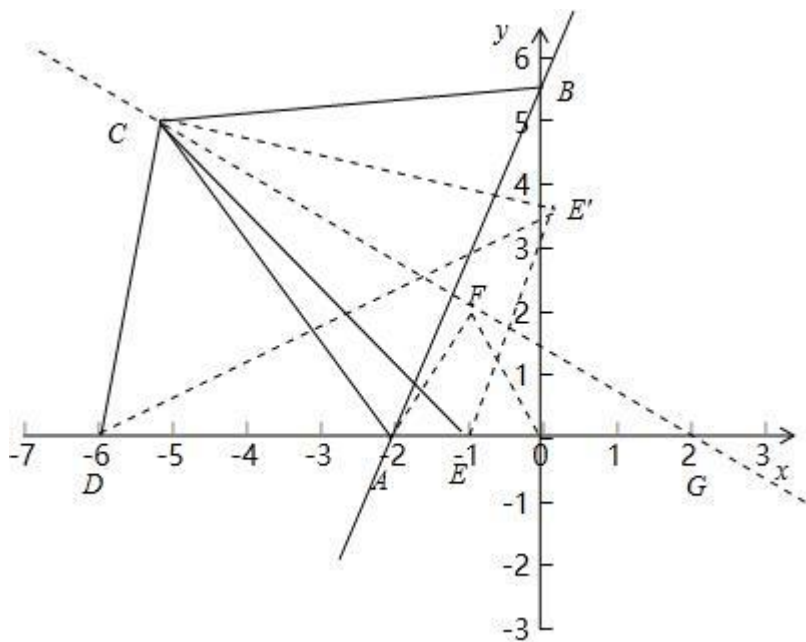
$$\therefore CD + CE = CD + CE',$$

$\therefore$ 当点 D, C, E' 在同一条直线上时, $DE' = CD + CE$ 的值最小,

$$\because AF = AO = 2, \angle FAO = 60^\circ, \angle AFG = 90^\circ,$$

$$\therefore AG = 4, EG = 3, EE' = 2 \times \frac{3}{4} AF = 3, \text{ 即 } E' \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3} \right),$$

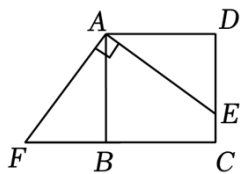
$$\therefore (CD + CE) \text{ 的最小值} = DE' = \sqrt{\left(-6 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = 7$$



故选：D.

二. 填空题（共 10 小题，满分 20 分，每小题 2 分）

11. (2 分) (2022 秋•昌图县期末) 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的 CD 边上，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABF$ ，若四边形 $AECF$ 的面积为 16， $DE=3$ ，则 AE 的长度为 5 .



解：∵把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 $\triangle ABF$ 的位置，

∴四边形 $AECF$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积等于 16，

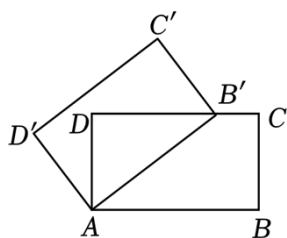
∴ $AD=DC=4$ ，

∵ $DE=3$ ，

∴Rt $\triangle ADE$ 中， $AE=\sqrt{3^2+4^2}=5$ ，

故答案为：5.

12. (2 分) (2023•宁江区三模) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ， $AD=3$ ，矩形 $ABCD$ 绕着点 A 逆时针旋转一定角度得到矩形 $AB'C'D'$ ，若点 B 的对应点 B' 落在边 CD 上，则 $B'C$ 的长为 1 .



解：∵矩形 $ABCD$ 绕着点 A 逆时针旋转一定角度得到矩形 $AB'C'D'$ ，

$$\therefore AB = AB' = 5, AB = CD = 5,$$

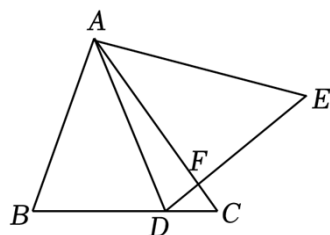
$$\because \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore B'D = \sqrt{AB'^2 - AD^2} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

$$\therefore B'C = CD - B'D = 1,$$

故答案为：1.

13. (2分) (2023•崇川区校级开学) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 55^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ， DE 交 AC 于 F 。当 $\alpha = 30^\circ$ 时，点 D 恰好落在 BC 上，此时 $\angle AFE$ 等于 100°。



解：∵将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE, \angle BAD = \angle CAE = 30^\circ, AB = AD, \angle C = \angle E,$$

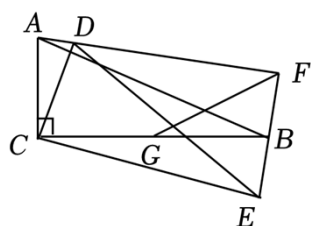
$$\therefore \angle B = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle E = 50^\circ,$$

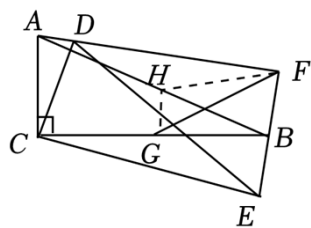
$$\therefore \angle AFE = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ = 100^\circ,$$

故答案为：100°.

14. (2分) (2023春•靖江市期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 7\text{cm}$ ， $BC = 24\text{cm}$ 。将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转后得 $\triangle DEC$ ，直线 AD 、 EB 相交于点 F 。取 BC 的中点 G ，连接 GF ，则 GF 长的最大值为 16 cm 。



解：如图，取 AB 的中点 H ，连接 HG ， HF ，



$\because \triangle DEC$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转得到的，

$\therefore CE=CB$ ， $CD=CA$ ， $\angle BCE=\angle ACD$ ，

设 $\angle BCE=\angle ACD=\alpha$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD=90^\circ - \alpha$ ，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB=\angle CAD=\angle CDA=\frac{180^\circ - \alpha}{2}=90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ，

$\therefore \angle CDF=\angle CBF=\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}=90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ，

在四边形 $BCDF$ 中，

$\angle BFA=360^\circ - \angle BCD - \angle CDF - \angle CBF=360^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2(90^\circ + \frac{\alpha}{2})=90^\circ$ ，

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{7^2+24^2}=25\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $HF=\frac{1}{2}AB=\frac{25}{2}\text{cm}$ ，

$\because HG$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore HG=\frac{1}{2}AC=\frac{7}{2}\text{cm}$ ，

$\therefore HF+HG=\frac{25}{2}+\frac{7}{2}=16\text{cm}$ ，

$\therefore FG \leq HF+HG=16\text{cm}$ ，

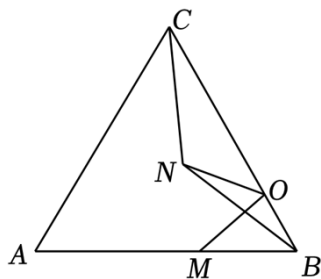
$\therefore$ 当 F ， H ， G 三点共线时， FG 最大，最大值为 $HF+HG=16\text{cm}$ ，

故答案为：16.

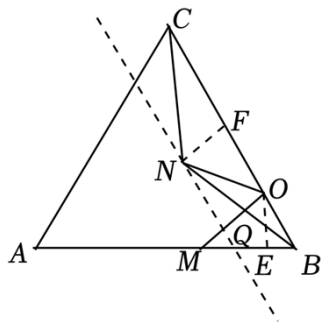
15. (2分) (2023春•武侯区校级期末) 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=8$ ， O 是 BC 上一点，且 $BO=\frac{1}{4}BC$ ，点 M

为 AB 边上一动点，连接 OM ，将线段 OM 绕点 O 按逆时针方向旋转 60° 至 ON ，连接 AN 、 CN ，则 $\triangle BCN$ 周

长的最小值为 $8+2\sqrt{19}$.



解：如图，作 $QE \perp AB$ 于点 E ，作 $NF \perp BC$ 于点 F ，则 $\angle OEM = \angle NFO = 90^\circ$ ，



$$\therefore \angle EMO = 90^\circ - \angle MOE,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $AB=8$ ，

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, \quad BC = AB = 8,$$

$$BO = \frac{1}{4}BC = 2,$$

$$\therefore \angle BOE = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BO = 1,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得 } OE = \sqrt{3},$$

$\because$ 线段 OM 绕点 O 按逆时针方向旋转 60° 至 ON ，

$$\therefore ON = OM, \quad \angle MON = 60^\circ;$$

$$\therefore \angle FON = 180^\circ - \angle MON - \angle MOE - \angle BOE = 180^\circ - 60^\circ - \angle MOE - 30^\circ = 90^\circ - \angle MOE,$$

$$\therefore \angle EMO = \angle FON,$$

$$\therefore \triangle EMO \cong \triangle FON \text{ (AAS)},$$

$$\therefore NF = OE = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 N 在到直线 BC 的距离为 $\sqrt{3}$ 的一条直线上运动，设这条直线与 AB 的交点为 Q ，则 $NQ \parallel BC$ ，

作点 B 关于直线 NQ 的对称点 B' ，连接 BB' 交直线 NQ 于点 P ，则当 C, N, B' 三点共线时， $\triangle BCN$ 的周长最小，如图 2，

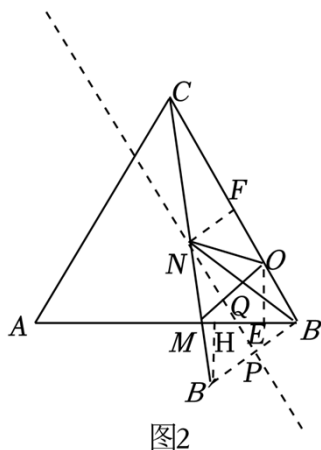


图2

$$\because NQ \parallel BC, \angle NFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FNP = 180^\circ - \angle NFO = 90^\circ,$$

$$\text{由轴对称的性质得 } \angle BPN = 90^\circ, BB' = 2BP = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } BPNF \text{ 是矩形},$$

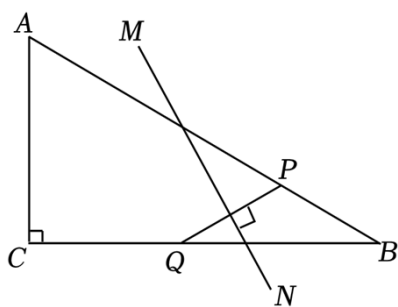
$$\therefore BP = NF = OE = \sqrt{3}, \angle FBP = 90^\circ, \text{ 即, } \angle CBB' = 90^\circ,$$

$$\therefore CB' = \sqrt{BC^2 + BB'^2} = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{19},$$

$$\therefore \triangle BCN \text{ 的周长} = BC + BN + CN = BC + CB' = 8 + 2\sqrt{19}.$$

$$\text{故答案为: } 8 + 2\sqrt{19}.$$

16. (2分) (2023春•凤城市期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$, 点 P 为 AB 上一点, 将线段 PB 绕点 P 顺时针旋转得线段 PQ , 点 Q 在射线 BC 上, 当 PQ 的垂直平分线 MN 经过 $\triangle ABC$ 一边中点时, PB 的长为 2 或 3 或 5.

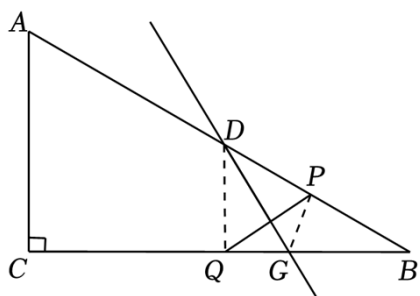


$$\text{解: } \because \angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, AC = 4,$$

$$\therefore AB = 8, BC = 4\sqrt{3},$$

PQ 的垂直平分线 MN 经过 $\triangle ABC$ 一边中点, 可分为以下三种情况: 经过 AB 的中点 D ; 经过 AC 的中点 E ; 经过 BC 的中点 F .

$$\text{当 } MN \text{ 经过 } AB \text{ 的中点 } D \text{ 时, 交 } BC \text{ 于点 } G, \text{ 如图: } BD = \frac{1}{2}AB = 4,$$



$\because PB$ 绕点 P 顺时针旋转得线段 PQ ,

$\therefore PQ = PB$,

$\therefore \angle PQB = \angle B = 30^\circ$,

$\because \angle DPQ$ 是 $\triangle PQB$ 的外角,

$\therefore \angle DPQ = \angle B + \angle PQB = 60^\circ$,

$\because MN$ 垂直平分 PQ ,

$\therefore PD = QD$,

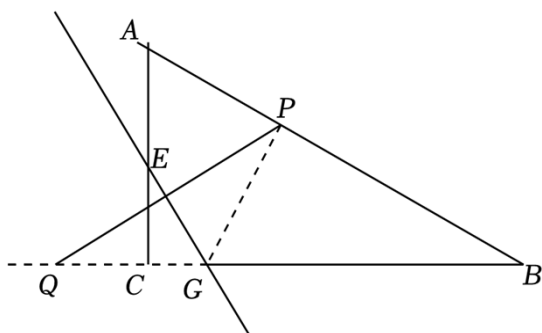
$\therefore \triangle PQD$ 是等边三角形,

$\therefore PD = QP$,

$\therefore PD = PB$,

$\therefore PB = \frac{1}{2}BD = 2$;

当 MN 经过 AC 的中点 E 时, 交 BC 于点 G , 如图: $EC = \frac{1}{2}AC = 2$,



$\because \angle PQB = 30^\circ$, MN 垂直 PQ ,

$\therefore \angle EGQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle CEG = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中, $EC = 2$,

$\therefore CG = \frac{2}{3}\sqrt{3}$,

$\therefore BG = \frac{10}{3}\sqrt{3}$,

∵ 点 G 在 MN 上,

$$\therefore PG = QG,$$

$$\therefore \angle PQB = \angle QPG = 30^\circ,$$

∵ $\angle PGB$ 是 $\triangle PQG$ 的外角,

$$\therefore \angle PGB = \angle PQB + \angle QPG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GPB = 90^\circ,$$

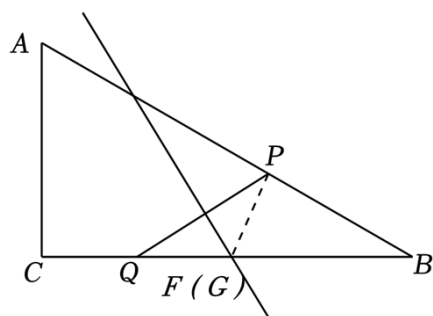
$$\therefore PG \perp PB,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PGB \text{ 中, } BG = \frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}BG = \frac{5}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } PB = \sqrt{BG^2 - PG^2} = 5;$$

当 MN 经过 BC 的中点 F 时, 交 BC 于点 $F(G)$, 如图: $BF = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3},$



同理可证: $PG \perp PB,$

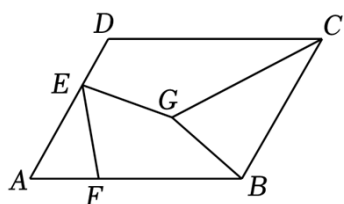
$$\text{在 Rt}\triangle PGB \text{ 中, } \angle B = 30^\circ, BF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore PB = 3.$$

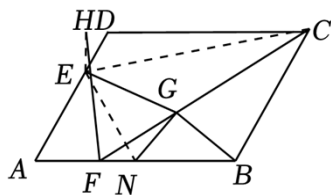
综上: PB 的长为: 2 或 5 或 3.

故答案为: 2 或 3 或 5.

17. (2 分) (2023 春•黔东南州期末) 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 16$, $AD = 12$, $\angle A = 60^\circ$, E 是边 AD 上一点, 且 $AE = 8$, F 是边 AB 上的一个动点, 将线段 EF 绕点 E 逆时针旋转 60° , 得到 EG , 连接 BG 、 CG , 则 $BG + CG$ 的最小值是 $4\sqrt{21}$.



解：如图，取 AB 的中点 N ，连接 EN ， EC ， GN ，作 $EH \perp CD$ 交 CD 的延长线于 H ，



由题意可得： $AE=8$ ， $DE=4$ ，

$\because$ 点 N 是 AB 的中点，

$\therefore AN=NB=8$ ，

$\therefore AE=AN$ ，

$\because \angle A=60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AEN$ 是等边三角形，

$\therefore EA=EN$ ， $\angle AEN=\angle FEG=60^\circ$ ， $\angle ANE=60^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF=\angle NEG$ ，

$\because EA=EN$ ， $EF=EG$ ，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle NEG$ (SAS)，

$\therefore \angle ENG=\angle A=60^\circ$ ，

$\therefore \angle GNB=180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 点 G 的运动轨迹是射线 NG ，

$\because BN=EN$ ， $\angle BNG=\angle ENG=60^\circ$ ， $NG=NG$ ，

$\therefore \triangle EGN \cong \triangle BGN$ (SAS)，

$\therefore GB=GE$ ，

$\therefore GB+GC=GE+GC \geq EC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中， $\angle H=90^\circ$ ， $DE=4$ ， $\angle EDH=60^\circ$ ，

$\therefore DH=\frac{1}{2}DE=2$ ， $EH=2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ECH$ 中， $EC=\sqrt{EH^2+CH^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+18^2}=4\sqrt{21}$ ，

$\therefore GB+GC \geq 4\sqrt{21}$ ，

$\therefore GB+GC$ 的最小值为 $4\sqrt{21}$ ；

故答案为： $4\sqrt{21}$ 。

18. (2分) (2023春•灌云县期中) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $\angle B=30^\circ$ ，点 P 是在直角边 BC 上一动

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/548032066041007010>