第二章 Brown 运动

本章主要内容

- **Brown 运动的定义及性质**
- Brown 运动有关的随机过程
- Brown 运动的仿真

Brown 运动的背景介绍

- 1827年英国植物学家发现布朗运动
- 1905年由爱因斯坦基于物理定律导出这个现象的数学描述.
- 此后该课题得到了巨大的发展，被一些列的物理学家完善
- 相比之下数学上的描述比较慢，因为准确地数学描述这个模型非常困难.
- 1900年巴舍利耶在他的博士论文中推测到布朗运动的一些结果
- 1918年Wiene r在博士论文以及后来的文章中给出该理论简明的数学公式

●布朗运动解释为随机游动的极限

● W(t) 表示质点在时刻t的位置，则W(t) 也表示质点直到t所作的位移，因此在时间(s, t)内，它所做的位移是**W(t)-W(s)**，由于在时间**(s,t)** 内质点受到周围分子的大量碰撞，每次碰撞都产生一个小的位移，故**W(t)-W(s** **)**是大量小位移的和，由中心极限定理它服从正态分布

●介质处于平衡状态，因此质点在一小区间上位移的统计规律只与区间长度有关，而与开始观察的时刻无关

●由于分子运动的独立性和无规则性，认为质点在不同时间内受到的碰撞是独立的，故所产生的位移也是独立的

一，布朗运动的定义

(Brown motion)B M

称实S.P.$\{W(t), t\geqslant 0\}$是Wiener 过程，如果

(1)　$W(0)=x\in R$

(2)　V$O\leq s<t$,　$W(t)-W(s)\sim N(0,($　$t-s))$

(3)V$n\geq 2$,V$O=t_0<t_1<\ldots<t,<\ldots,$　$W(t,)-W(t_1),\ldots$

$W(t_2)-W(t_1), W(t_1)-W(t_0)$是相互独立的随机变量

(4)随机过程W 具有连续的样本轨道

$W(0)=0$　的 BM　也称为标准Br　own运动

Wiener过程

称实S.P.$\{W(t),t\geq 0\}$ 是参数为σ 2的Wiener过程，如 果

(1) $W(0)=0$

(2) $\{W(t),t\geq 0\}$是平稳的独立增量过程.

(3) $\forall 0\leq s<t, W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

布朗运动定义的来源

一、直线上的随机游动

设一粒子在直线上随机游动，即粒子每隔△t时 间，等概率地向左或向右移动△x 的距离。以**X(t)**表 示时刻t粒子的位置，则

$$X(t)=\triangle x(X_1+\ldots+X[/An)$$

其中

$$X_i=\begin{cases}+1, & \text{如果步长为}\triangle x\text{的第i步向右}\\ -1, & \text{如果步长为}\triangle x\text{的第i步向左}\end{cases}$$

且X; 相互独立。

$$P\{X_i=1\}=P\{X_i=-1\}=\frac{1}{2}$$

因为　　EX;=0,Var(X;)=1

所以　$E[X(t)]=0, Var(X(t))=(\triangle x)^2[t/\triangle t]$

当$\triangle t \to 0$　时，应有$\triangle x \to 0$

令$\triangle x=\sigma\sqrt{\triangle t}$　则当$\triangle t\to 0$　时，有

$$E[X(t)]=0, Var(X(t))\to\sigma^2 t$$

注：若$\triangle x=(\triangle t)$“　当x>1/2　时Var(X(i))→0,

当α〈1/2　时，Var(X(t))→o.

一维Brown运动可看作质点在直线上作简单随机游动的极限.

三 Brown运动的数字特征

定理

设{**W(t),t≥0**}是参数为σ 2的Wiener过程.

则

(1) $\forall t>0, W(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$

(2) $m_W(t)=0, D_W(t)=\sigma^2 t, t \geq 0,$

$$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2 \min(s,t), s,t \geq 0$$

证明 (1) 由定义，显然成立.

(2) 由(1)易知有

$$m_W(t)=0, D_W(t)=\sigma^2 t, t \geq 0$$

对$s\geq 0,t\geqslant 0$, 不妨设 $s\leq t$, 则

$$R_w(s,t)=E[W(s)W(t)]$$

$$=E[(W(s)-W(0))W(t)-W(s)+W(s)]]$$

独立性 $$=E[(W(s)-W(O))(W(t)-W(s))]+E[W(s)]^2$$

$$=0+E[W(s)]?$$

$$=D[W(s)]+(E[W(s)])^2$$

$$=\sigma^2 s$$

$$=\boldsymbol{\sigma^2\min(s,t)}$$

$$C_w(s,t)=R_w(s,t)-m_w(s)m_y(t)=\sigma^2\min(s,t)$$

例1. SBM 是正态过程.

证 明设$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为1的Wiener 过程. 则对任意的$n\geq 1$, 以及任意的

$$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n$$

$\{W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n)\}$**是n维**随机变量

由**Wiener** 过程的定义知

$W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ 相互独立

$W(t_k)-W(t_{k-1})$ 服从$N(0,(t_k-t_{k-1}))$ 分布

所以$(W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1}))$

是n维正态随机变量.

又由于

$$(W(t_1),W(t_2),\ldots,W(t_n))=(W(t_1),W(t_2)-W(t_1),\ldots,W(t_n)-W(t_{n-1}))\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以 $(W(t_1),W(t_2),\cdots,W(t_n))$ 是n维正态变量.

所以 $\{W(t),t\geq 0\}$ 是正态过程.

例2:求布朗运动W(t)的联合概率密度

解：设W(t)是标准布朗运动，对任意的$t_1<t_2<\cdots<t_n$,有

$\left(W(t_1),\cdots,W(t_n)\right)$的联合密度函数为

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$$

其中 $$f_t\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

由此可以看出 $(W(t_1),\ldots,W(t_n))$服从n维正态分布。

这是因为在$W(t_1)=x_1$的条件下，$W(t_2)$的条件密度函数为

$$f_{W(t_2)|W(t_1)}\left(x_2\left|x_1\right.\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}}$$

$$=f_{t_2-t_1}\left(x_2-x_1\right)$$

即 $W(t_2)\Big|_{|W(t_1)=x_1}$ N(x_1,t_2-t_1)

∵P(W(t_2)≤x_2 W(t_1)=x_1)=P(W(t_2)-x_1≤x_2-x_1 W(t)=x_1)

=P(W(t_2)-W(t)≤xz-x_1 W(t)=x_1)

=P(W(t_2)-W(t_1)≤x_2-

$$= \int_{-\infty}^{x_2-x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{y^2}{2(t_2-t_1)}} dy$$

与W(t_1) 独

W(t_2)-W(t_1)

所以 E[W(t_2) W(t)=x_0]= x_0

$$Var\left(W\left(t_2\right)\middle|W\left(t_1\right)=x_0\right)=t_2-t_1$$

E[W(t_2)W(t_1)]=W(t)

$$Var\left(W\left(t_2\right)\middle|W\left(t_1\right)\right)=t_2-t_1$$

f(xj,x_2,…,x
1)

$$= f_{W(t_1)}(x_1) f_{W(t_2)|W(t_1)}(x_2 \,|\, x_1) f_{W(t_3)|W(t_2),W(t_1)}(x_3 \,|\, x_2, x_1)$$

$$\cdots f_{W(t_n)|W(t_{n-1}),\cdots,W(t_1)}(x_n \,|\, x_{n-1}, \cdots, x_1)$$

$$= f_{W(t_1)}(x_1) f_{W(t_2)|W(t_1)}(x_2 \,|\, x_1) f_{W(t_3)|W(t_2)}(x_3 \,|\, x_2) \cdots f_{W(t_n)|W(t_{n-1})}(x_n \,|\, x_{n-1})$$

=f,(x)f 2 -,(x 2 -x 1)…f,-,(x 1 -
x-)

例 3: 写 出SBM 的n 维特征函数

分析：求 (W(t_1),W(t_2),…W(t_n)) 的特征函数

解：不是一般性，假设0=1<1<z_2<⋯<t。定义增量

ξ =W(t_4)-W(t_1), k=1, 2, ⋯, n. 因此 5, 5⋯ ξ

是相互独立且 ξ~ N(0,tx-tx). 由于 $W(t_k)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, k=1,\cdots,n$

故

$$\varphi(t_1,t_2\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n)=E[\exp(j\sum_{k=1}^{n}u_kW(t_k))]$$

$$=E[\exp(j(u_1+\ldots u_n)\xi]\times\ldots\times E[\exp(ju_n\xi_n)]$$

$$=\exp(-\tfrac{1}{2}(u_1+\cdots u_n)^2t_1)\times\cdots\times\exp(-\tfrac{1}{2}u_n{}^2(t_n-t_{n-1}))$$

四 .Brown 运动的性质

1. 对称性 -W 也是一个标准Brown 运动

2. **自相似性：对任意的常数a>0 和固定的时间指标t>0,有$W(af)=a^{1}2W(t)$**

3. 时间可逆性 **$B(t)=W(T-W(T-t)$**
则B={B(t),O≤t≤T }也是一个标准Brown运动

对称性的证明：

同 为A
必 名 $-W(0)=0$

$\forall 0 \leq s < t$, $-(W(t)-W(s)) \sim N(0,(t-s))$

$\forall n \geq 2, \forall 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_7 < \ldots,$

$-(W(t_1)-W(t_0)), -(W(t_2)-W(t_1)), \ldots, -(W(t_7)-W(t_7))$

是相互独立的随机变量

布朗运动W(t)的对称性

在$W(t_0)=x_0$的条件下， $W(t_0+t)$的条件密度函数为

$$f_{W(t_0+t)|W(t_0)}(x|x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2t}}$$

$$\therefore P\{W(t_0+t)>x_0|W(t_0)=x_0\}=\int_{x_0}^{+\infty}f_{W(t_0+t)|W(t_0)}(x|x_0)dx$$

$$=P\{W(t_0+t)\le x_0|W(t_0)=x_0\}=\frac{1}{2}$$

上式表明，给定初始条件$W(t_0)=x_0$，对于任意的$t>0$，布朗运动在t_0+t时刻的位置高于或低于初始位置的概率相等。**这种性质称为布朗运动的对称性。**

自相似性证明

$W(at) \sim N(0,at)$　　　　令 $X = a^{\frac{1}{2}}W(t)$

要证X　服从正态分布　　　　$\overline{\quad}$ dZ

$$P(W(at)\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi at}}e^{-\frac{y^2}{2at}}dy=\int_{-\infty}^{a^{-\frac{1}{2}}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{z^2}{2t}}dz$$

$$P(X\le x)=P(a^{\frac{1}{2}}W(t)\le x)=\int_{-\infty}^{a^{-\frac{1}{2}}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$$

时间可逆性证明:

显然 **B(0)=W(T)-W(T-0)=0**

$\forall 0 \le s < t,$ $B(t)-B(s)$

$=W(T)-W(T-t)-(W(T)-W(T-s))\sim N(0,(t-s))$

$\forall n \ge 2, \forall 0=t_0<t_1<\ldots<t_n<\ldots,$

$B(t_1)-B(t_0), B(t_2)-B(t_1), \cdots, B(t_n)-B(t_{n-1})$ 即

$W(T-t_0)-W(T-t_1), W(T-t_1)-W(T-t_2), \ldots, W(T-t_{n-1})-W(T-t_n)$

是相互独立的随机变量

4. 平移不变性：　**B(f)=W(t+a)-W(a),**

t≥0, a是常数，则B(t)是BM

5. 尺度不变性：$\{\frac{W(ct)}{\sqrt{c}}, t \geq\}(c>0)$是标准BM

6. 马氏性：　布朗运动是马氏过程

因为布朗运动是独立增量过程，所以， W(t+s)-*W(s)*

与过程在时刻s之前的值独立。

∴∀s,t>0

$$P\left\{W\left(t+s\right)\leq a\middle|W\left(s\right)=x,W\left(u\right),0\leq u<s\right\}$$

$$=P\left\{W\left(t+s\right)-W\left(s\right)\leq a-x\middle|W\left(s\right)=x,B\left(u\right),0\leq u<s\right\}$$

$$=P\left\{W\left(t+s\right)-W\left(s\right)\leq a-x\right\}$$

$$=P\left\{W\left(t+s\right)\leq a\middle|W\left(s\right)=x\right\}$$