

7.

为了进一步提升驾驶人交通安全文明意识，驾考新规要求驾校学员必须到街道路口执勤站岗，协助交警劝导交通.现有甲、乙等 5 名驾校学员按要求分配到三个不同的路口站岗，每个路口至少一人，且甲、乙在同一路口的分配方案共有 ()

- A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

8. 函数 $f(x) = x^3 - x^2 + x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l ，则 l 在 y 轴上的截距为 ()

- A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

9. 若非零实数 a 、 b 满足 $2^a = 3^b$ ，则下列式子一定正确的是 ()

- A. $b > a$ B. $b < a$
C. $|b| < |a|$ D. $|b| > |a|$

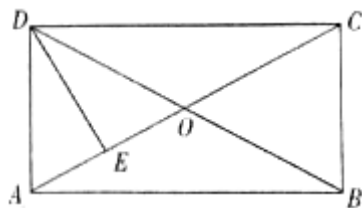
10. 已知点 $A(-3, 0), B(0, 3)$ ，若点 P 在曲线 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 上运动，则 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 ()

- A. 6 B. 3 C. $\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

11. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x = n^2 - 1, n \in A\}$ ， $P = A \cap B$ ，则 P 的子集共有 ()

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

12. 如图所示，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， E 为 AO 的中点，若 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} (\lambda, \mu \in R)$ ，则 $\lambda + \mu$ 等于 ()。



- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. -1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设 O 为坐标原点， $A(2, 1)$ ，若点 $B(x, y)$ 满足 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ ，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最大值是_____。

14. 曲线 $y = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \ln x$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程是_____。

15. 根据如图的算法，输出的结果是_____。

```

S=0
For i=1 To 10
S=S+i
Next
输出S

```

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n = 2n^2 - n + 1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

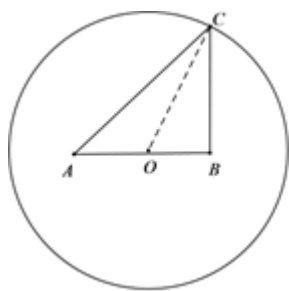
17. (12 分) 某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉，观景喷泉的示意图如图所示， A, B 两点为喷泉，圆心 O 为 AB 的中点，其中 $OA = OB = a$ 米，半径 $OC = 10$ 米，市民可位于水池边缘任意一点 C 处观赏。

(1) 若当 $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ 时， $\sin \angle BCO = \frac{1}{3}$ ，求此时 a 的值；

(2) 设 $y = CA^2 + CB^2$ ，且 $CA^2 + CB^2 \leq 232$ 。

(i) 试将 y 表示为 a 的函数，并求出 a 的取值范围；

(ii) 若同时要求市民在水池边缘任意一点 C 处观赏喷泉时，观赏角度 $\angle ACB$ 的最大值不小于 $\frac{\pi}{6}$ ，试求 A, B 两处喷泉间距离的最小值。

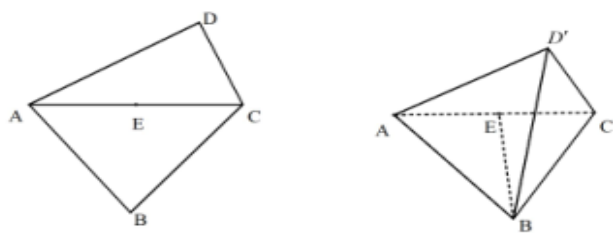


18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$ (θ 为参数)，以原点 O 为极点， x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$ 。

(1) 求曲线 C 的普通方程；

(2) 求曲线 l 和曲线 C 的公共点的极坐标。

19. (12 分) 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ ， $AD = AB = BC = 2CD$ ， $AE = EC$ ，沿对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle ACD'$ ，使得 $BD' = BC$ 。

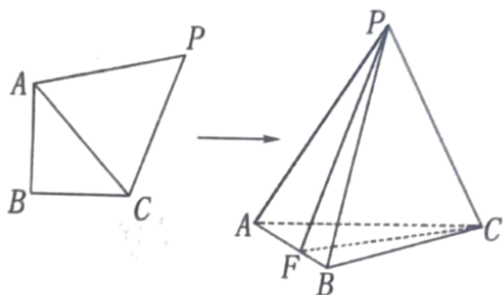


(1) 证明: $BE \perp CD'$;

(2) 求直线 BE 与平面 ABD' 所成角的正弦值.

20. (12 分) 在四边形 $ABCP$ 中, $AB = BC = \sqrt{2}$, $\angle P = \frac{\pi}{3}$, $PA = PC = 2$; 如图, 将 $\triangle PAC$ 沿 AC 边折起, 连结 PB ,

使 $PB = PA$, 求证:



(1) 平面 $ABC \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若 F 为棱 AB 上一点, 且 AP 与平面 PCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求二面角 $F-PC-A$ 的大小.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(ax) - a$, ($a > 0$).

(1) 若函数 $h(x) = e^x f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的值;

(2) 定义: 若直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 $C_1: f_1(x, y) = 0$ 、 $C_2: f_2(x, y) = 0$ 都相切, 我们称直线 l 为曲线 C_1 、 C_2 的公切线, 证明: 曲线 $f(x) = \ln(ax) - a$, ($a > 0$) 与 $g(x) = ae^x$, ($a > 0$) 总存在公切线.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 曲线 C_1 的极坐标方程为:

$\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = t + a, \\ y = a - t, \end{cases}$ 其中 $t \in \mathbf{R}$, t 为参数, a 为常数.

(1) 写出 C_1 与 C_2 的直角坐标方程;

(2) a 在什么范围内取值时, C_1 与 C_2 有交点.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

试题分析：由已知直线 $\sin A \cdot x - ay - c = 0$ 的斜率为 $\frac{\sin A}{a}$ ，直线 $bx + \sin B \cdot y + \sin C = 0$ 的斜率为 $-\frac{b}{\sin B}$ ，又由正

弦定理得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ ，故 $\frac{\sin A}{a} \times \left(-\frac{b}{\sin B}\right) = \frac{\sin B}{b} \times \left(-\frac{b}{\sin B}\right) = -1$ ，两直线垂直

考点：直线与直线的位置关系

2、A

【解析】

由 $0 \leq x \leq 2\pi$ 求出 $\omega x + \frac{\pi}{5}$ 范围，结合正弦函数的图象零点特征，建立 ω 不等量关系，即可求解.

【详解】

当 $x \in [0, 2\pi]$ 时， $\omega x + \frac{\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{5}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{5}\right]$ ，

$\because f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有且仅有 5 个零点，

$\therefore 5\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} < 6\pi$ ， $\therefore \frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查正弦型函数的性质，整体代换是解题的关键，属于基础题.

3、D

【解析】

先用公差 d 表示出 a_2, a_5 ，结合等比数列求出 d .

【详解】

$a_2 = 2 + d, a_5 = 2 + 4d$ ，因为 a_1, a_2, a_5 成等比数列，所以 $(2 + d)^2 = 2(2 + 4d)$ ，解得 $d = 4$.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式.属于简单题，化归基本量，寻求等量关系是求解的关键.

4、D

【解析】

利用数列的递推关系式判断求解数列的通项公式，然后求解数列的和，判断选项的正误即可。

【详解】

当 $n \geq 2$ 时， $S_{n+1} + S_{n-1} = 2(S_n + 1) \Rightarrow S_{n+1} - S_n = S_n - S_{n-1} + 2 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2$ 。

所以数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起为等差数列， $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2n-2, n \geq 2 \end{cases}$ ，

所以， $a_4 = 6$ ， $a_{10} = 18$ 。

$$S_n = a_1 + \frac{(a_2 + a_n)(n-1)}{2} = n(n-1) + 1, \quad S_{16} = 16 \times 15 + 1 = 241,$$

$$S_{20} = 20 \times 19 + 1 = 381.$$

故选：D。

【点睛】

本题考查数列的递推关系式的应用、数列求和以及数列的通项公式的求法，考查转化思想以及计算能力，是中档题。

5、D

【解析】

先通过 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ 得到原函数 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为增函数且为偶函数，再利用到 y 轴距离求解不等式即可。

【详解】

$$\text{构造函数 } g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3},$$

$$\text{则 } g'(x) = x^2 f(x) + \frac{x^3}{3} f'(x) = x^2 \left(\frac{x}{3} f'(x) + f(x) \right)$$

由题可知 $\frac{x}{3}f'(x) + f(x) > 0$ ，所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 在 $x \geq 0$ 时为增函数；

由 x^3 为奇函数， $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x) = \frac{x^3 f(x)}{3}$ 为偶函数；

$$\text{又 } x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) < 0, \text{ 即 } x^3 f(x) < (1+2x)^3 f(1+2x)$$

$$\text{即 } g(x) < g(1+2x)$$

又 $g(x)$ 为开口向上的偶函数

所以 $|x| < |1+2x|$, 解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$

故选: D

【点睛】

此题考查根据导函数构造原函数, 偶函数解不等式等知识点, 属于较难题目.

6、C

【解析】

先解不等式 $f(x) \leq 2$, 可得出 $x \geq -\frac{8}{9}$, 求出函数 $y = f(x)$ 的值域, 由题意可知, 不等式 $(m-1)f(x) \geq -\frac{8}{9}$ 在定义域上恒成立, 可得出关于 m 的不等式, 即可解得实数 m 的取值范围.

【详解】

$$Q f(x) = \begin{cases} |\log_3(x+1)|, & x \in (-1, 8) \\ \frac{4}{x-6}, & x \in [8, +\infty) \end{cases}, \text{ 先解不等式 } f(x) \leq 2.$$

①当 $-1 < x < 8$ 时, 由 $f(x) = |\log_3(x+1)| \leq 2$, 得 $-2 \leq \log_3(x+1) \leq 2$, 解得 $-\frac{8}{9} \leq x \leq 8$, 此时 $-\frac{8}{9} \leq x < 8$;

②当 $x \geq 8$ 时, 由 $f(x) = \frac{4}{x-6} \leq 2$, 得 $x \geq 8$.

所以, 不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集为 $\left\{x \mid x \geq -\frac{8}{9}\right\}$.

下面来求函数 $y = f(x)$ 的值域.

当 $-1 < x < 8$ 时, $0 < x+1 < 9$, 则 $\log_3(x+1) < 2$, 此时 $f(x) = |\log_3(x+1)| \geq 0$;

当 $x \geq 8$ 时, $x-6 \geq 2$, 此时 $f(x) = \frac{4}{x-6} \in (0, 2]$.

综上所述, 函数 $y = f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

由于 $f[(m-1)f(x)] - 2 \leq 0$ 在定义域上恒成立,

则不等式 $(m-1)f(x) \geq -\frac{8}{9}$ 在定义域上恒成立, 所以, $m-1 \geq 0$, 解得 $m \geq 1$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用函数不等式恒成立求参数, 同时也考查了分段函数基本性质的应用, 考查分类讨论思想的应用, 属于中等题.

7、C

【解析】

先将甲、乙两人看作一个整体，当作一个元素，再将这四个元素分成3个部分，每一个部分至少一个，再将这3部分分配到3个不同的路口，根据分步计数原理可得选项.

【详解】

把甲、乙两名交警看作一个整体，5个人变成了4个元素，再把这4个元素分成3部分，每部分至少有1个人，共有 C_4^2 种方法，再把这3部分分到3个不同的路口，有 A_3^3 种方法，由分步计数原理，共有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种方案。

故选：C.

【点睛】

本题主要考查排列与组合,常常运用捆绑法,插空法,先分组后分配等一些基本思想和方法解决问题,属于中档题.

8、A

【解析】

求出函数在 $x=1$ 处的导数后可得曲线在 $(1, f(1))$ 处的切线方程，从而可求切线的纵截距.

【详解】

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, \text{ 故 } f'(1) = 2,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为： $y = 2(x-1) + f(1) = 2x - 1$.

令 $x = 0$ ，则 $y = -1$ ，故切线的纵截距为 -1 .

故选：A.

【点睛】

本题考查导数的几何意义以及直线的截距，注意直线的纵截距指直线与 y 轴交点的纵坐标，因此截距有正有负，本题属于基础题.

9、C

【解析】

令 $2^a = 3^b = t$ ，则 $t > 0$ ， $t \neq 1$ ，将指数式化成对数式得 a 、 b 后，然后取绝对值作差比较可得.

【详解】

$$\text{令 } 2^a = 3^b = t, \text{ 则 } t > 0, t \neq 1, \therefore a = \log_2 t = \frac{\lg t}{\lg 2}, b = \log_3 t = \frac{\lg t}{\lg 3},$$

$$\therefore |a| - |b| = \frac{|\lg t|}{\lg 2} - \frac{|\lg t|}{\lg 3} = \frac{|\lg t|(\lg 3 - \lg 2)}{\lg 2 \cdot \lg 3} > 0, \text{ 因此, } |a| > |b|.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了利用作差法比较大小，同时也考查了指数式与对数式的转化，考查推理能力，属于中等题.

10、B

【解析】

求得直线 AB 的方程，画出曲线表示的下半圆，结合图象可得 P 位于 $(-1,0)$ ，结合点到直线的距离公式和两点的距离公式，以及三角形的面积公式，可得所求最小值.

【详解】

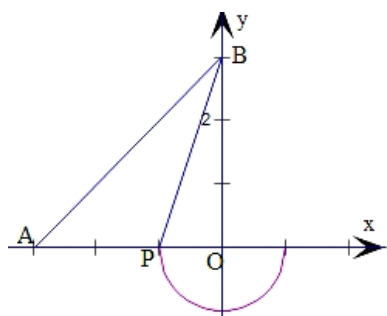
解：曲线 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 表示以原点 O 为圆心，1 为半径的下半圆(包括两个端点)，如图，

直线 AB 的方程为 $x - y + 3 = 0$ ，

可得 $|AB| = 3\sqrt{2}$ ，由圆与直线的位置关系知 P 在 $(-1,0)$ 时， P 到直线 AB 距离最短，即为 $\frac{|-1-0+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

则 $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$.

故选：B.



【点睛】

本题考查三角形面积最值，解题关键是掌握直线与圆的位置关系，确定半圆上的点到直线距离的最小值，这由数形结合思想易得.

11、B

【解析】

根据集合 A 中的元素，可得集合 B ，然后根据交集的概念，可得 P ，最后根据子集的概念，利用 2^n 计算，可得结果.

【详解】

由题可知： $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x = n^2 - 1, n \in A\}$

当 $n = 0$ 时， $x = -1$

当 $n = 1$ 时， $x = 0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/548054134030006134>