江苏省南京市南京师大附中2023-2024学年高一上学期期末数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．集合 $A=\left\{x \middle| -2<x<\frac{7}{3}\right\}$，集合 $B=\{-4,-2,0,2,4,6\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-2,0,2\}$　　B．$\{-2,0,2,4\}$　　C．$\{0,2,4\}$　　D．$\{0,2\}$

2．已知角 α 的终边过点 $P(3a,-4a)$，其中 $a>0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为（　）

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{7}{5}$　　C．$-\frac{1}{5}$　　D．$-\frac{7}{5}$

3．设点 O 是正三角形 ABC 的中心，则向量 $\overline{AO}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$ 是（　）

A．共起点的向量　B．模相等的向量　C．共线向量　D．相等向量

4．若 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$（　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5．已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，$f(-1)=0$，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集是（　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-1,1)$

6．设 a 为实数，则关于 x 的不等式 $(ax-2)(2x-4)<0$ 的解集不可能是（　）

A．$\left(\frac{2}{a},2\right)$　　B．$(-\infty,2)\cup\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$

C． $(2,+\infty)$　　D． $\left(2,\frac{2}{a}\right)$

7．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=2f(x)$，当$x\in(0,1]$时，$f\left(x\right)=-\frac{1}{4}sin\pi x$．

若对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则实数$m$的最大值为（　）

A．$\frac{9}{4}$　　B．$\frac{7}{3}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．$\frac{8}{3}$

8．已知常数$\omega\geq0$，函数$f(x)=\sin\omega x$在区间$\left[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$上单调，则$\omega$不可能等于

（　）

A．$\frac{8}{3}$　　B．2　　C．$\frac{8}{5}$　　D．$\frac{4}{3}$

二、多选题

9．若函数$f(x)$满足：①对定义域内的任意x_1，x_2，都有$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=f\left(x_1x_2\right)$；②当$x>1$时，$f(x)>0$，则称$f(x)$为“N函数”.下列函数是“N函数”的是（　）

A．$f(x)=2^x$　　B．$f(x)=\ln x$　　C．$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D．$f(x)=\log_2 x$

10．已知函数$f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$满足$f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$，则（　）

A．$f(x)$的最小正周期为2π　　B．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{12}$对称

C．$f(x)$在区间$\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$上单调递增　　D．$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有两个零点

11．已知$f(x)$为定义在R上的偶函数，当$x\geq0$时，有$f(x+1)=-f(x)$，且当$x\in[0,1)$

时，$f(x)=\log_2(x+1)$.下列命题正确的是（　）

A．$f(2023)+f(-2024)=0$　　B．$f(x)$是周期为2的周期函数

C．直线$y=x$与$f(x)$的图象有且仅有2个交点 D．$f(x)$的值域为$(-1,1)$

12．设$f(x)$，$g(x)$都是定义域为区间D的函数，若存在$k>0$，使得对任意x_1，$x_2\in D$，都有$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le k\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|$成立，则称$f(x)$在$D$上相对于$g(x)$满足$k^*$条件.下列命题正确的是（　）

A．若$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=x$，$f(x)$在区间$[2,4]$上相对于$g(x)$满足k^*条件，则k的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

B．若$f(x)=\sin x$，$g(x)=\sqrt{x}$，则$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上相对于$g(x)$满足2^*条件

C．设a为实数，若$f(x)=ax^2$，$g(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)$在区间$[2,3]$上相对于$g(x)$满足4^*条件，则a的最大值为$\frac{2}{27}$

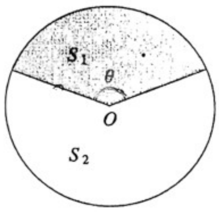
D．若$f(x)=x$，$g(x)=\log_3\left(9^x+1\right)$，$f(x)$在$D$上相对于$g(x)$满足$1^*$条件，则$D\subseteq(-\infty,0]$

三、填空题

13．$\log_{\frac{1}{16}}8+\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}+2024^0=$______.

14．“数摺聚清风，一捻生秋意”是宋代朱翌描写折扇的诗句.一般情况下，折扇可看作是从一个圆面中剪下的扇形制作而成.如图，设扇形的面积为S_1，其圆心角为θ，圆

面中剩余部分的面积为S_2，当S_1与S_2的比值为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，扇面为“美观扇面”.若扇面为“美观扇面”，扇形的半径$R=20\mathrm{cm}$，则此时的扇形面积为______cm^2.



15．若a，b，c均为正数，且$a+b+c=3$，则$\frac{1}{2a+1}+\frac{2}{b+c}$的最小值是______.

16．设a为实数，若实数x_0是关于x的方程$\mathrm{e}^x+(1-a)x=\ln a+\ln x$的解，则$\frac{\mathrm{e}^{x_0-1}}{ax_0}=$______.

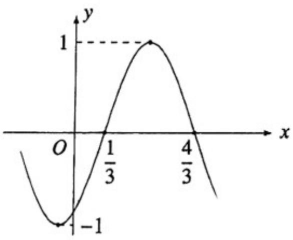
四、解答题

17．已知集合$A=\left\{x\left|\left(x-a-1\right)\left(x-2a+3\right)<0\right.\right\}$，集合$B=\left\{x\left|\frac{2x}{4-x}\geq 0\right.\right\}$.

(1)当$a=2$时，求$A\cap B$；

(2)若$A\bigcap B=A$，求实数a的取值范围.

18．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|\pi$ ）的部分图象如图所示.若将函数$f(x)$的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，则所得图象为函数$g(x)$的图象.



(1)求$f(x)$的解析式；

(2)当$x\in[0,2]$时，求$g(x)$的单调递减区间.

19．已知函数$f(x)=x|x|$，函数$g(x)=x^2-2x-m$.

(1)求不等式$f\left(x^3-2\right)>-1$的解集；

(2)如果对于任意$x_2\in[-1,2]$，都存在$x_1\in[-2,1]$，使得$g\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)$，求实数$m$的取值范围.

20．中国政府在第七十五届联合国大会上提出.“中国将努力争取在2060年前实现碳中和.”随后，国务院印发了《关于加快建立健全绿色低碳循环发展经济体系的指导意见》.某企业去年消耗电费50万元，预计今年若不作任何改变，则今年消耗电费与去年相同.为了响应号召，节能减排，该企业决定安装一个可使用20年的太阳能供电设备，并接入本企业的电网.安装这种供电设备的费用（单位：万元）与太阳能电池板的面积（单位：m^2）成正比，比例系数约为0.6.为了保证正常用电，安装后采用太阳能和电能互补供电的模式.设在此模式下，安装太阳能供电设备后该企业每年消耗的电费C（单位：万元）与安装的这种太阳能电池板的面积x（单位：m^2）之间的函数关系是$C(x)=\dfrac{k}{10x+60}$（$x\geq 0$，k为常数）.记该企业安装这种太阳能供电设备的费用与20年所消耗的电费之和为y（单位：万元）.

(1)求常数k，并写出y关于x的函数关系式；

(2)当太阳能电池板的面积为多少平方米时，y取得最小值？最小值是多少万元？

21．已知函数$f(x)=\log_2\left(4^x+1\right)+ax$是偶函数.

(1)求实数a的值；

(2)若函数$g(x)=2^{2x}+2^{-2x}+m\cdot 2^{f(x)}$的最小值为$-4$，求实数$m$的值.

22．设a为常数，函数$f(x)=2\cos^2 x-a\sin x-1$.

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的值域；

(2)讨论$f(x)$在区间$\left(0,\pi\right)$上的零点的个数；

(3)设n为正整数，$f(x)$在区间$\left(0,n\pi\right)$上恰有2024个零点，求所有可能的正整数n的值.

参考答案：

1．D

【分析】由交集的定义直接求解.

【详解】集合$A=\left\{x\middle|-2<x<\frac{7}{3}\right\}$，集合$B=\{-4,-2,0,2,4,6\}$，则$A\cap B=\{0,2\}$.

故选：D

2．C

【分析】由三角函数的定义直接求解.

【详解】角α的终边过点$P(3a,-4a)$，其中$a>0$，则点P到原点的距离

$r=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}=5a$，

所以$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{-4a}{5a}+\frac{3a}{5a}=-\frac{1}{5}$.

故选：C

3．B

【分析】利用平面向量的相关概念判断.

【详解】因为点O是正三角形ABC的中心，

所以$\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是模相等的向量；

向量只有大小与方向两个要素，没有起点之说；

这三个向量方向不同，不是共线向量；

这三个向量方向不同，不是相等向量.

故选：B

4．A

【分析】利用三角函数的诱导公式求解.

【详解】解：因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}$，

故选：A

5．A

【分析】判断出函数在$(-\infty,0)$上的单调性以及函数值正负情况，结合奇偶性，可判断函数

$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性，以及函数值的正负情况，由此可得不等式的解集.

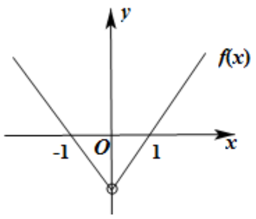
【详解】由题意知对任意x_1，$x_2\in(-\infty,0)$且$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，$f(-1)=0$，

则$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且当$x<-1$时，$f(x)>0$；当$-1<x<0$时，$f(x)<0$；

又$f(x)$是定义在R上的偶函数，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(1)=0$，

且当$0<x<1$时，$f(x)<0$；当$x>1$时，$f(x)>0$；

不妨画出$f(x)$图象示意图如图：



则不等式$xf(x)<0$的解集是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

故选：A

6．B

【分析】分类讨论解不等式$(ax-2)(2x-4)<0$，判断不可能的解集.

【详解】关于x的不等式$(ax-2)(2x-4)<0$，

若$a=0$，不等式为$-2(2x-4)<0$，解得$x>2$，此时解集为$(2,+\infty)$；

若$a\neq 0$，方程$(ax-2)(2x-4)=0$，解得$x=\frac{2}{a}$或$x=2$，

$a<0$时，不等式$(ax-2)(2x-4)<0$解得$x<\frac{2}{a}$或$x>2$，此时解集为$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$；

$0<a<1$时，$\frac{2}{a}>2$，不等式$(ax-2)(2x-4)<0$解得$2<x<\frac{2}{a}$，此时解集为$\left(2,\frac{2}{a}\right)$；

$a=1$时，$\frac{2}{a}=2$，不等式$(ax-2)(2x-4)<0$解集为$\varnothing$，

$a>1$时，$\frac{2}{a}<2$，不等式$(ax-2)(2x-4)<0$解得$\frac{2}{a}<x<2$，此时解集为$\left(\frac{2}{a},2\right)$；

所以不等式$(ax-2)(2x-4)<0$的解集不可能是$(-\infty,2)\cup\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$.

故选：B

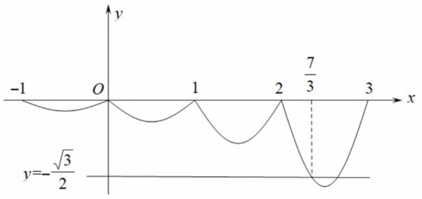
7．B

【分析】根据已知利用正弦函数图象与性质、函数的周期性，结合函数图象进行求解即可.

【详解】当$x\in\left(0,1\right]$时，$f\left(x\right)=-\frac{1}{4}\sin\pi x$，

且定义在**R**上的函数$f\left(x\right)$满足$f(x+1)=2f(x)$，

所以函数$f\left(x\right)$的大致图象为



因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1\pi 1}{4}\sin\frac{}{2}=-\frac{}{4}$，$f(x+1)=2f(x)$，

所以$f\left(\frac{3}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}>-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{5}{2}\right)=2f\left(\frac{3}{2}\right)=-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以由$f\left(x+2\right)=2f\left(x+1\right)=4f\left(x\right)=4\left(-\frac{1}{4}\sin\pi x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得$x=\frac{1}{3}$，

当$x\leqslant\frac{3}{2}$时，由$f\left(x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$的$x=\frac{1}{3}+1+1=\frac{7}{3}$，

所以对任意$x\in(-\infty,m]$，都有$f(x)\geq-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

得实数m的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]$，则实数$m$的最大值为$-\frac{7}{3}$.

故选：B.

8．C

【分析】根据正弦函数的单调性，由$f(x)$的单调区间得ω的取值范围，验证各选项中的值.

【详解】常数$\omega\geq0$，当$x\in\left[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$，有$\omega x\in\left[\frac{4\omega}{3}\pi,\frac{5\omega}{3}\pi\right]$，

正弦函数的单调区间为$\left[\frac{(2k-1)\pi}{2},\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

函数$f(x)=\sin\omega x$在区间$\left[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$上单调，

则有$\begin{cases}\frac{\left(2k-1\right)\pi}{2}\leq\frac{4\pi\omega}{3}\\ \frac{\left(2k+1\right)\pi}{2}\geq\frac{5\pi\omega}{3}\end{cases},\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，解得$\frac{3\left(2k-1\right)}{8}\leq\omega\leq\frac{3\left(2k+1\right)}{10},\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

$k=2$时，$\frac{9}{8}\leq\omega\leq\frac{3}{2}$，$\omega=\frac{4}{3}$满足；

$k=3$时，$\frac{15}{8}\le\omega\le\frac{21}{10}$，$\omega=2$满足；

$k=4$时，$\frac{21}{8}\le\omega\le\frac{27}{10}$，$\omega=\frac{8}{3}$满足；

不等式$\frac{3(2k-1)}{8}\le\frac{8}{5}\le\frac{3(2k+1)}{10}$，解得$\frac{13}{6}\le k\le\frac{79}{30}$，因为$k\in Z$，则$k$无解，

则$\omega=\frac{8}{5}$时，函数$f(x)=\sin\omega x$在区间$\left[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$不单调；

故选：C

【点睛】方法点睛：

依题意有$\omega x\in\left[\frac{4\omega}{3}\pi,\frac{5\omega}{3}\pi\right]$，区间包含于正弦函数的单调区间，可求出$\omega$的取值范围.

9．BD

【分析】根据“$\mathbf{N}$函数”的定义，逐项验证即可求解.

【详解】对A：由$f\left(x\right)=2^x$，对定义域内的任意x_1，x_2，

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2^{x_1}+2^{x_2}\ne f\left(x_1x_2\right)=2^{x_1x_2}$不满足条件①，故A错误；

对B：由$f\left(x\right)=\ln x$，对定义域内的任意x_1，x_2，

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2=f\left(x_1x_2\right)=\ln x_1x_2$，满足条件①，

当$x>1$时，因$f\left(x\right)=\ln x$在其定义域上是增函数，所以$f\left(x\right)>f\left(1\right)=\ln 1=0$，满足条件②，

故B正确.

对C：由$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，对定义域内的任意$x_1$，$x_2$，

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}\neq f\left(x_1x_2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1x_2}$，

不满足条件①，故 C 错误；

对 D：由 $f\left(x\right)=\log_2 x$，对定义域内的任意 x_1， x_2，

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\log_2 x_1+\log_2 x_2=\log_2 x_1x_2=f\left(x_1x_2\right)=\log_2 x_1x_2$，满足条件①，

当 $x>1$ 时，因 $f\left(x\right)=\log_2 x$ 在其定义域上是增函数，所以 $f\left(x\right)>f\left(1\right)=\log_2 1=0$，满足条件②，故 D 正确.

故选：BD.

10．BD

【分析】根据 $f(x)$ 满足 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$，得到 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，从而求得

$f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，然后逐项判断.

【详解】解：因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，

所以 $f(\frac{\pi}{6})=2\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，

则 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；