01

# 知识点40 三角函数的性质及三角函数图象的对称性

# 教材知识萃取

| | | $y=\sin x$ | $y=\cos x$ | $y=\tan x$ |
|---|---|---|---|---|
| **奇偶性** | | 奇函数 | 偶函数 | 奇函数 |
| **最小正周期** | | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ |
| **单调性** | | 单调递增区间是$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$;单调递减区间是$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ | 单调递增区间是$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$;单调递减区间是$[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ | 单调递增区间是$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$;<br>无单调递减区间 |
| **图象的对称性** | **对称轴** | $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ | $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ | 无对称轴 |
| | **对称中心** | $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$ | $(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$ | $(\frac{k\pi}{2},0)(k\in\mathbf{Z})$ |

注

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$,函数$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$,其中$A\neq0,\omega\neq0$.

# 教材知识萃取

**常用结论**

**1.三角函数的对称性与周期的关系**

（1）相邻的两条对称轴（或两个对称中心）之间的距离为 $\frac{T}{2}$.

（2）对称中心到相邻的对称轴的距离为 $\frac{T}{4}$.

（3）相邻的两个最低点（最高点）之间的距离为T.

**2.与三角函数奇偶性有关的结论**

（1）若函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(x \in \mathbf{R})$ 是奇函数，则 $\varphi = k\pi$（$k \in \mathbf{Z}$）；若为偶函数，则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$.

（2）若函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)(x \in \mathbf{R})$ 是奇函数，则 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$；若为偶函数，则 $\varphi = k\pi(k \in \mathbf{Z})$.

（3）若 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 为奇函数，则有 $\varphi = k\pi(k \in \mathbf{Z})$.

# 教材素材变式

1. [多选][人A必修一P214习题5.4第12题变式]下列函数中，以$\pi$为最小正周期，且在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减的是( AC )

A.$y=|\sin x|$ B.$y=2\cos x$ C.$y=-\tan x$ D.$y=\sin 2x$

**【解析】**对于A，$y=\sin x$的最小正周期为$2\pi$，结合正弦函数的图象知$y=|\sin x|$的最小正周期为$\pi$，且$y=|\sin x|$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,故A符合题意.对于B,$y=2\cos x$的最小正周期为$2\pi$，故B不符合题意.对于C，$y=-\tan x$的最小正周期为$\pi$，且结合正切函数的图象知，$y=-\tan x$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,故C符合题意.对于D,$y=\sin 2x$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$2x\in(\pi,2\pi)$，所以$y=\sin 2x$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上不单调，故D不符合题意.故选AC.

2. [ 人B必修三P65习题7-3B第4（4）题变式 ] 函数$f(x)=\sin^2 x+\cos x\left(x\in[0,\frac{\pi}{2}]\right)$的最大值为( **B** )

A.1　　B.$\frac{5}{4}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.2

**【解析】**$f(x)=\sin^2 x+\cos x=-\cos^2 x+\cos x+1=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，由$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$得$\cos x\in[0,1]$，所以当$\cos x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取到最大值，且$f(x)_{\max}=\frac{5}{4}$，故选B.

3. [ 多选 ] [ 人B必修三P59练习B第5题变式 ] 已知函数$f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列结论正确的是( **ACD** )

A.函数$f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$

B.函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\}$

C.函数$f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$

D.函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right),k\in\mathbf{Z}$

**【解析】**对于A，函数$f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{2}$，所以A正确；对于B，令$2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，所以B错误；对于C，令$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，所以函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8},0\right),k\in\mathbf{Z}$对称，所以C正确；对于D，令$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以D正确.故选ACD.

4.［多选］［人A必修一P214习题5.4第19题变式］已知函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，则下列结论正确的是（ **AC** ）

A.点$\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$是函数$f(x)$图象的一个对称中心

B.直线$x=\frac{3\pi}{8}$是函数$f(x)$图象的一条对称轴

C.函数$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点

D.函数$f(x)$在$[0,\pi]$上有三个极值点

**【解析】**对于函数$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，当$x=\frac{3\pi}{8}$时，$f(x)=1$，结合正弦函数图象的对称性，可得点$\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$是函数$f(x)$图象的一个对称中心，故A正确，B错误；当$x\in[0,\pi]$时，$2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}]$，故当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}$或$\frac{11\pi}{6}$时，$f(x)=0$，故函数$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点，C正确；当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时，函数$f(x)$取得极值，故函数$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个极值点，D错误.故选AC．

5.[人A必修一P203练习第3题变式，2021北京卷]已知函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，则该函数( **D** )

A.是奇函数，最大值为2　　B.是偶函数，最大值为2　　C.是奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$　　D.是偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

**【解析】**因为$f(-x)=\cos(-x)-\cos(-2x)=\cos x-\cos 2x=f(x)$，所以函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$为偶函数.

$f(x)=\cos x-\cos 2x=-2\cos^2 x+\cos x+1=-2\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$,当且仅当$\cos x=\frac{1}{4}$时，$f(x)$取得最大值$\frac{9}{8}$，所以$f(x)$的最大值为$\frac{9}{8}$.故选D.

变式1 **改变表达式形式**使函数$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$为奇函数，且在区间$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减的$\theta$ 的一个值可以是( C)

A.$-\frac{\pi}{3}$　　B.$-\frac{\pi}{6}$　　C.$\frac{2\pi}{3}$　　D.$\frac{5\pi}{6}$

**【解析】**因为$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)=2\sin\left(2x+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$为奇函数，所以$\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi$ ,$k\in Z$，得$\theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$,$k\in \mathbf{Z}$，结合选项可知，A，C符合范围.当$\theta=-\frac{\pi}{3}$时，$f(x)=2\sin 2x$，在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递增，不符合题意；当$\theta=\frac{2\pi}{3}$时，$f(x)=-2\sin 2x$，在$[0,\frac{\pi}{4}]$上单调递减，符合题意.故选C.

变式2 **变条件**已知函数$f(x)=\cos(x+a)+\sin(x+b)$，则下列结论正确的是(　B　)

A.若$a+b=0$，则$f(x)$为奇函数

B.若$a+b=\frac{\pi}{2}$，则$f(x)$为偶函数

C.若$b-a=\frac{\pi}{2}$，则$f(x)$为偶函数

D.若$a-b=\pi$，则$f(x)$为奇函数

**【解析】**$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，对A，若$a+b=0$，则当$f(x)$为奇函数时，$f(0)=0$，而$f(0)=\cos a-\sin a=0$不恒成立，故$f(x)$不是奇函数,A错误；

对B，若$a+b=\frac{\pi}{2}$，则$f(x)=\cos(x+a)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(x+a)+\cos(x-a)$，

$f(-x)=\cos(-x+a)+\cos(-x-a)=\cos(x-a)+\cos(x+a)=f(x)$，故$f(x)$为偶函数，B正确；

对C，若$b-a=\frac{\pi}{2}$，则$f(x)=\cos(x+a)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+a\right)=2\cos(x+a)$，$f(-x)=2\cos(-x+a)\neq f(x)$，故$f(x)$不是偶函数，C错误；

对D,若$a-b=\pi$，则$f(x)=\cos(x+b+\pi)+\sin(x+b)=-\cos(x+b)+\sin(x+b)$，当$f(x)$为奇函数时，$f(0)=0$，而$f(0)=-\cos b+\sin b=0$不恒成立，故$f(x)$不是奇函数，D错误.故选B.

**解后反思**

判断一个函数$f(x)$（其定义域包含0）是否为奇函数，可以从$f(0)$是否等于0这个角度入手.

6. [ 北师必修二P39练习第6题变式 ] 已知函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$在$\left(0,\frac{4\pi}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right)$上单调递增，则$f(x)$的最小正周期为(　D)

A.$\frac{\pi}{2}$　　B.$\pi$　　C.$2\pi$　　D.$4\pi$

**【解析】**由题意，结合余弦函数的图象可得$\frac{4\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=\pi$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，故选D.

7. [ 多选 ] [ 人A必修一P255复习参考题5第21题变式 ] 已知函数$f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象的相邻两条对称轴间的距离为$2\pi$ ，$f(0)=1$，则下列结论正确的是( BD )

A.$\omega=\frac{\pi}{2}$

B.$f(x)$的图象的对称轴方程为$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$

C.$f(x)$的单调递减区间为$[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}](k\in\mathbf{Z})$

D.不等式$f(x)\geq 1$的解集为$[4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi](k\in\mathbf{Z})$

**【解析】**由题意，函数$f(x)$的图象的相邻两条对称轴间的距离为$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}$，故A错误；

$\because f(0)=2\cos\varphi=1$，$\therefore\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，令$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得

$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore f(x)$的图象的对称轴方程为$x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，故B正确；令

$2k\pi\leq\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$4k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq 4k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore f(x)$的单调递减区间为

$[4k\pi-\frac{2\pi}{3},4k\pi+\frac{4\pi}{3}]$，$k\in\mathbf{Z}$，故C错误；由$f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 1$，可得$\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{1}{2}$，则

$2k\pi-\frac{\pi}{3}\leq\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$,得$4k\pi-\frac{4\pi}{3}\leq x\leq 4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$不等式$f(x)\geq 1$的解集为

$[4k\pi-\frac{4\pi}{3},4k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，故D正确.故选BD．