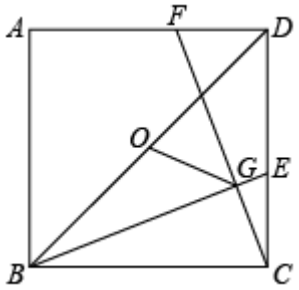
难点特训（一）和勾股定理有关的压轴大题

1．正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 CD，AD 上一点，$CE=DF$，BE，CF 交于点 G，O 为 BD 的中点．



(1)求证：$\triangle BCE \cong \triangle CDF$；

(2)求证：$BE \perp CF$ ；

(3)求证：$BG-CG=\sqrt{2}OG$

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)见解析

【分析】（1）根据四边形 $ABCD$ 是正方形，判定 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$,

（2）根据全等的性质可得 $\angle CBE=\angle DCF$，再根据 $\angle BCG+\angle DCF=90°$,得出 $\angle BCG+\angle CBE=90°$，进而得到 $\angle BGC=90°$, 即 $BE \perp CF$

（3）连接 OC，在 BG 取点 H，使得 $BH=CG$，连接 OH，证明 $\triangle OGH$ 为等腰直角三角形，进而得出 $HG=\sqrt{2}OG$, 再判定 $\triangle BOH \cong \triangle COG$, 得出 $BH=CG$, 根据 $BG-BH=HG$, 即可得到 $BG-CG=\sqrt{2}OG$

（1）

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore BC=CD, \angle BCD=\angle CDF=90°$，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BC=CD \\ \angle BCD=\angle CDF \\ CE=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF$

（2）

证明：$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$

$\therefore \angle CBE = \angle DCF$，

又$\because \angle BCG + \angle DCF = 90°$

$\therefore \angle BCG + \angle CBE = 90°$

$\therefore \angle BGC = 90°$，即 $BE \perp CF$

（3）

证明：如图，连接 OC，

在 BG 取点 H，使得 $BH = CG$，连接 OH

$\because O$ 为 BD 的中点，即 O 为正方形的对称中心，

$\therefore$ $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

由（1）知 $\angle EBC = \angle DCF$

$\therefore \angle OBH = 45° - \angle EBC, \angle OCG = 45° - \angle DCF$

$\therefore \angle OBH = \angle OCG$

在 $\triangle OBH$ 和 $\triangle OCG$ 中，

$$\begin{cases} OB = OC \\ \angle OBH = \angle OCG \\ BH = CG \end{cases}$$

$\therefore \triangle OBH \cong \triangle OCG$

$\therefore OH = OG, \angle BOH = \angle COG$

又$\because \angle BOH + \angle HOC = 90°$

$\therefore \angle COG + \angle HOC = 90°$

$\therefore \triangle GOH$ 是等腰直角三角形

$\therefore HG = \sqrt{2}OG, HO = GO,$

$\because \angle BOC = \angle GOH = 90°$

$\therefore \angle BOH = \angle COG,$

在 $\triangle BOH$ 和 $\triangle COG$ 中，

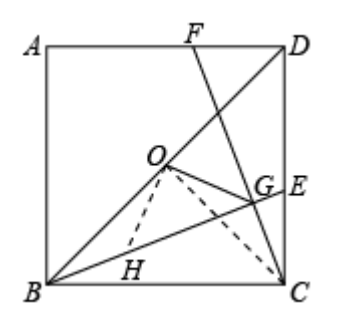
$$\begin{cases} BO = CO \\ \angle BOH = \angle COG \\ HO = GO \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOH \cong \triangle COG$

$\therefore BH = CG$

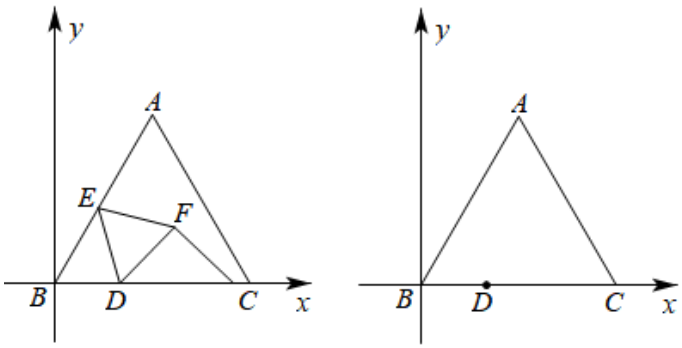
$\because BG-BH=HG$

$\therefore BG-CG=\sqrt{2}OG$



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质以及等腰直角三角形性质的综合应用，解决问题的关键是证出$\triangle GOH$是等腰直角三角形，依据全等三角形的对应边相等进行求解.

2．在平面直角坐标系xOy中，点B、C的坐标分别为（0，0）、（12，0），点A在第一象限，且$\triangle ABC$是等边三角形．点D的坐标为（4，0），E是边AB上一动点，连接DE，以DE为边在DE右侧作等边$\triangle DEF$.



备用图

(1)求出A点坐标；

(2)当点F落在边AC上时，$\triangle CDF$与$\triangle BED$全等吗？若全等，请给予证明；若不全等，请说明理由；

(3)连接CF，当$\triangle CDF$是等腰三角形时，$BE=$_____.

【答案】(1)A（6，$6\sqrt{3}$）；

(2)$\triangle CDF\cong\triangle BED$，证明见解析；

(3)$10+2\sqrt{13}$或6或$2+2\sqrt{13}$.

【分析】（1）如图1中，过点A作$AH\perp BCA$于点H．解直角三角形求出BH，AH，可得结论；

（2）如图2中，结论：$\triangle CDF\cong\triangle BED$．根据$AAS$证明三角形全等即可；

（3）分三种情形：如图3-1中，当$CD=CF$时，过点C作$CJ\perp DF$于点J，过点D作$DK\perp BE$于点

K．如图 3-2 中，当 $FD=FC$ 时，过点 F 作 $FT\perp CD$ 于点 T．如图 3-3 中，当 $DF=DC=8$ 时，$DE=DF=8$，分别求出 KE，BK 可得结论．

（1）

解：如图 1 中，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H.

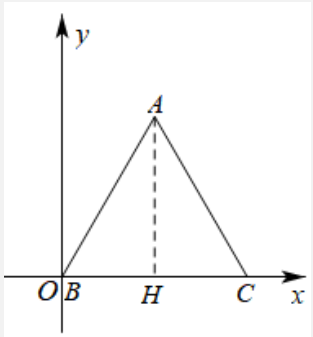


图1

∵C（6，0），

∴$BC=6$，

∵$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AH\perp BC$，

∴$\angle ABH=60°$，$BH=HC=6$，

∴ $AH=\sqrt{3}BH=6\sqrt{3}$，

∴A（6，$6\sqrt{3}$）；

（2）

如图 2 中，结论：$\triangle CDF\cong\triangle BED$.

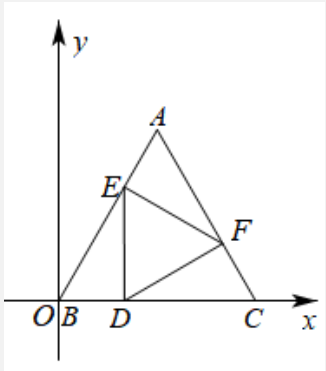


图2

理由：∵$\triangle DEF$ 是等边三角形，$\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴$\angle EDF=\angle ABC=60°$，$DE=DF$，

∵$\angle EDC=\angle ABC+\angle DEB=\angle EDF+\angle FDC$，

∴$\angle DEB=\angle CDF$，

在$\triangle CDF$ 和$\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases}\angle DCF=\angle EBD\\ \angle DEB=\angle CDF\\ DE=FD\end{cases},$$

∴△*CDF*≌△*BED*（*AAS*）；

（3）

如图 3-1 中，当 *CD*＝*CF* 时，过点 *C* 作 *CJ*⊥*DF* 于点 *J*，过点 *D* 作 *DK*⊥*BE* 于点 *K*，过点 *F* 作 *FP*⊥*CD* 于点 *P*.

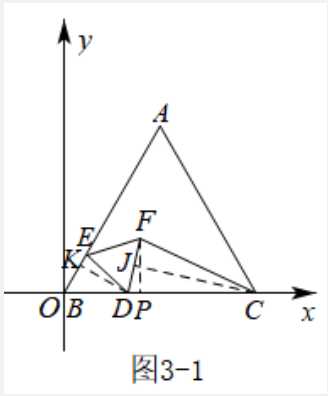


图3-1

设 *DE*＝*DF*＝*x*，

∵*D*（4，0），

∴*OD*＝4，

∵∠*DKB*＝90°，∠*DOK*＝60°，

∴∠*BDK*＝30°，

∴$BK=\frac{1}{2}OD=2$，$DK=\sqrt{OD^2-OK^2}=2\sqrt{3}$.

∵*CD*＝*CF*，*CJ*⊥*DF*，

∴$DJ=FJ=\frac{1}{2}x$，

∵∠*DKE*＝∠*FPD*＝90°，∠*DEK*＝∠*FDP*，*DE*＝*FD*，

∴△*DKE*≌△*FPD*（*AAS*），

∴*EK*＝*DP*，*DK*＝*FP*＝$2\sqrt{3}$，

∵$S_{\triangle}CDF=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot FP=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot CJ$，

∴$\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times x\times\sqrt{8^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$，

解得，$x^2=128-32\sqrt{13}$ 或 $x^2=128+32\sqrt{13}$（舍去），

∴$DF^2=128-32\sqrt{13}$

$\therefore EK=DP=\sqrt{DF^2-PF^2}=\sqrt{128-32\sqrt{13}-12}=\sqrt{\left(8+2\sqrt{13}\right)^2}$

$\therefore EK=8+2\sqrt{13}$，

$\therefore BE=BK+EK=10+2\sqrt{13}$；

如图 3-2 中，当 $FD=FC$ 时，过点 F 作 $FT\perp CD$ 于点 T.

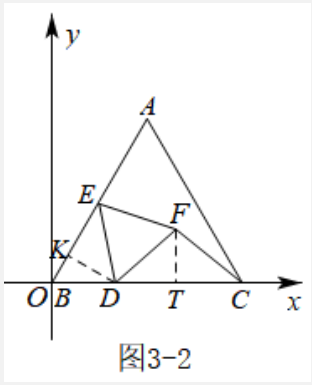


图3-2

$\because FD=FC$，$FT\perp CD$，

$\therefore DT=TC=4$，

$\because \angle DKE=\angle DTF=90°$，$\angle DEK=\angle FDT$，$DE=DF$，

$\therefore \triangle EKD\cong\triangle DTF$（$AAS$），

$\therefore EK=DT=4$，

$\therefore BE=BK+EK=2+4=6$；

如图 3-3 中，当 $DF=DC=8$ 时，$DE=DF=8$，

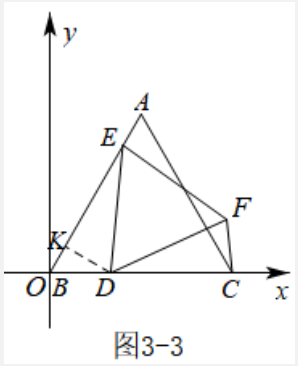


图3-3

$\therefore EK=\sqrt{DE^2-DK^2}=2\sqrt{13}$，

$\therefore BE=BK+EK=2+2\sqrt{13}$，

综上所述，满足条件的 BE 的值为 $10+2\sqrt{13}$ 或 6 或 $2+2\sqrt{13}$，

故答案为：$10+2\sqrt{13}$ 或 6 或 $2+2\sqrt{13}$.

【点睛】本题属三角形综合题，考查了等边三角形的性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.

3．在□$ABCD$中，连接BD，若$BD\perp CD$，点E为边AD上一点，连接CE．

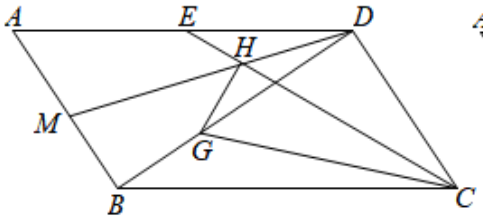


图1

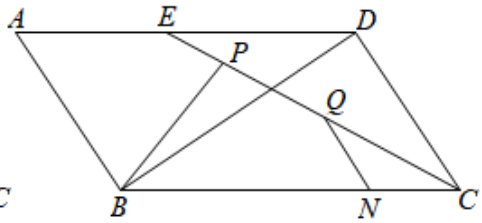


图2

(1)如图1，点G在BD上，连接CG，过G作$GH\perp CE$于点H，连接DH并延长交AB于点M．求证：$\angle HGD=\angle DCE$；

(2)如图1，在（1）的前提下，若$HG=BM$，$DG=DC$．求证：$BM+\sqrt{2}DH=DB$；

(3)如图2，$\angle ABC=120°$，$AB=\sqrt{5}$，点N在BC边上，$BC=4CN$，若CE是$\angle DCB$的角平分线，线段PQ（点P在点Q的左侧）在线段CE上运动，$PQ=\frac{\sqrt{15}}{2}$，连接BP，NQ，求$BP+PQ+QN$的最小值．

【答案】(1)见解析

(2)见解析

(3)$\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{2}$

【分析】（1）设CH与DG相交于K，根据直角三角形的性质和对顶角相等求解即可；

（2）过点D作$DF\perp DM$，交CE于F，先证明$\triangle DCF\cong\triangle DGH$（$ASA$），得到$\triangle FDH$是等腰直角三角形，求得$HF=\sqrt{2}DH$，再证明$\triangle DMB\cong\triangle CGH$（$AAS$）证得$CF=BM$，$DB=CH$即可证得结论；

（3）在图2中，过B作$BF\parallel PQ$，且$BF=PQ=\frac{\sqrt{15}}{2}$，连接$QF$、$GF$、$DF$，根据平行四边形的判定和性质以及角平分线的对称性可得$BP=FQ$，点N关于CE的对称点G在CD上，连接QG，则$QG=QN$，$CG=CN$，

由$BP+PQ+QN=FQ+QG+PQ\geq FG+\frac{\sqrt{15}}{2}$，（当$F$、$Q$、$G$共线时取等号），知$BP+PQ+QN$的最小值是$FG$的长，过点$F$作$FM\perp BD$于$M$，过点$G$作$GH\perp DF$于$H$，利用平行四边形的性质和含30°的直角三角形的三边关系以及勾股定理及其逆定理分别求得FH、HG即可解答．

（1）

证明：设CH与DG相交于K，

$\because BD\perp CD$，$GH\perp CE$，

$\therefore\angle CDK=\angle GHK=90°$，

∴∠HGD+∠GKH=∠DCE+∠DKC=90°，

∵∠GKH=∠DKC，

∴∠HGD=∠DCE；

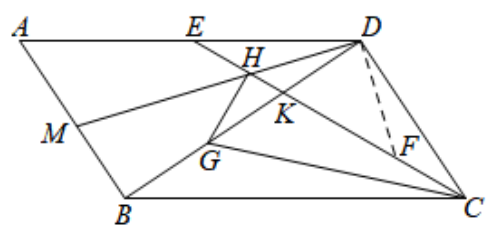


图1

（2）

证明：在图 1 中，过点 D 作 DF⊥DM，交 CE 于 F，

∵BD⊥CD，DF⊥DM，

∴∠CDG=∠FDH=90°，

∴∠CDF=∠GDH，

在△DCF 和△DGH 中，

$$\begin{cases}\angle DCE=\angle HGD\\ DC=DG\\ \angle CDF=\angle GDH\end{cases}$$，

∴△DCF≌△DGH（ASA），

∴DF=DH，CF=HG，

∴△FDH 是等腰直角三角形，

∴∠DHF=∠DFH=45°，HF=$\sqrt{2}$ DH，

∵DC=DG，∠CDG=90°，

∴∠DGC=∠DCG=45°，

∴∠DGC=∠DHF，

∵∠DGC+∠GCH+∠CKG=∠DHF+∠BDM+∠DKH=180°，∠CKG=∠DKH，

∴∠GCH=∠BDM，

∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴AB∥CD，

∴∠MBD=∠CDG=90°，则∠MBD=∠GHC=90°，

在△DMB 和△CGH，

$$\begin{cases}\angle BDM=\angle GCH\\ \angle MBD=\angle GHC\\ BM=HG\end{cases},$$

∴△DMB≌△CGH（AAS），

∴DB=CH，

∵CF=HG，BM=HG，

∴CF=BM，

∵CF+HF=CH，

∴BM+$\sqrt{2}$DH=DB；

（3）

解：在图2中，过B作BF∥PQ，且BF=PQ=$\frac{\sqrt{15}}{2}$，连接QF、DF，则四边形PBFQ是平行四边形，

∴BP=FQ，

∵CE是∠DCB的平分线，

∴点N关于CE的对称点G在CD上，连接QG，GF、则QG=QN，CG=CN，

∴BP+PQ+QN=FQ+QG+PQ≥FG+$\frac{\sqrt{15}}{2}$，（当F、Q、G共线时取等号），

∴BP+PQ+QN的最小值是FG的长，

过点F作FM⊥BD于M，过点G作GH⊥DF于H，

∵四边形ABCD是平行四边形，∠ABC=120°，

∴∠DCB=60°，CD=AB=$\sqrt{5}$，又∠CDB=90°，

∴∠DBC=30°，则BC=2CD=2$\sqrt{5}$，BD=$\sqrt{3}$CD=$\sqrt{15}$，

∵CE平分DCB，

∴∠DCE=∠BCE=$\frac{1}{2}$∠DCB=30°，又BF∥CE，

∴∠CBF=∠BCE=30°，则∠MBF=60°，

∵FM⊥BD，

∴∠BFM=30°，则BM=$\frac{1}{2}$BF=$\frac{\sqrt{15}}{4}$，FM=$\sqrt{3}$BM=$\frac{3\sqrt{5}}{4}$，

∴DM=BD-BM=$\frac{3\sqrt{15}}{4}$，则DF=$\sqrt{DM^2+FM^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，

∴$BD^2=DF^2+BF^2$，

∴∠BFD=90°即BF⊥DF，又BF∥CE，

∴CE⊥DF，又GH⊥DF，

∴$GH \parallel CE$，$\angle DHG=90°$，

∴$\angle DGH=\angle DCE=30°$，

∵$BC=4CN=2\sqrt{5}$，

∴$CN=\frac{\sqrt{5}}{2}=CG$，

∴$DG=CD-CG=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

在 Rt△DHG 中，$DH=\frac{1}{2}DG=\frac{\sqrt{5}}{4}$，$HG=\sqrt{3}DH=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

∴$FH=DF-DH=\frac{5\sqrt{5}}{4}$，

在 Rt△FHG 中，$FG=\sqrt{FH^2+HG^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$，

∴$BP+PQ+QN$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{15}}{2}$.

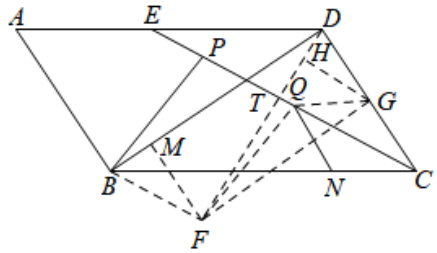


图2

【点睛】本题是四边形的综合题，主要考查平行四边形的判定与性质、含 30°直角三角形的边角关系、平行线的判定与性质、勾股定理及其逆定理、角平分线的性质、等腰直角三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、最短路径问题等知识，涉及知识点较多，难度较难，熟练掌握相关知识的联系与运用，添加辅助线解决问题是解答的关键.

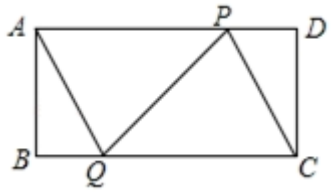
4．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=16$，点 P 从点 D 出发向点 A 运动，运动到点 A 停止，同时，点 Q 从点 B 出发向点 C 运动，运动到点 C 即停止，点 P、Q 的速度都是每秒 1 个单位，连接 PQ、AQ、CP，设点 P、Q 运动的时间为 t 秒.

（1）当 $t=$____时，四边形 $ABQP$ 是矩形；

（2）当 $t=6$ 时，判断四边形 $AQCP$ 的形状，并说明理由；

（3）直接写出以 PQ 为对角线的正方形面积为 96 时 t 的值；

（4）整个运动当中，线段 PQ 扫过的面积是 ____.



【答案】（1）8，（2）菱形，理由见解析，（3）8﹣4$\sqrt{2}$或8+4$\sqrt{2}$；（4）64．

【分析】（1）由矩形性质得出$BC=AD=16$，$AB=CD=8$，由已知可得，$BQ=DP=t$，$AP=CQ=16-t$，当$BQ=AP$时，四边形$ABQP$为矩形，得出方程，解方程即可；

（2）$t=6$时，$BQ=6$，$DP=6$，得出$CQ=16-6=10$，$AP=16-6=10$，$AP=CQ$，$AP\parallel CQ$，四边形$AQCP$为平行四边形，在Rt△ABQ中，由勾股定理求出$AQ=10$，得出$AQ=CQ$，即可得出结论；

（3）分两种情况：求出正方形的边长为$4\sqrt{6}$，则对角线PQ为$8\sqrt{3}$，由勾股定理求出QM的长，由题意得出方程，解方程即可；

（4）连接AC、BD，AC、BC相交于点E，线段PQ扫过的面积＝△AED的面积+△BEC的面积，即可得出结果．

【详解】解：（1）∵在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=16$，

∴$BC=AD=16$，$AB=CD=8$，

由已知可得，$BQ=DP=t$，$AP=CQ=16-t$，

在矩形$ABCD$中，$\angle B=90°$，$AD\parallel BC$，

当$BQ=AP$时，四边形$ABQP$为矩形，

∴$t=16-t$，

解得：$t=8$，

∴当$t=8s$时，四边形$ABQP$为矩形；

故答案为：8

（2）四边形$AQCP$为菱形；理由如下：

∵$t=6$，

∴$BQ=6$，$DP=6$，

∴$CQ=16-6=10$，$AP=16-6=10$，

∴$AP=CQ$，$AP\parallel CQ$，

∴四边形$AQCP$为平行四边形，

在Rt△ABQ中，$AQ=\sqrt{AB^2+BQ^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

∴$AQ=CQ$，

∴平行四边形 $AQCP$ 为菱形，

∴当 $t=6$ 时，四边形 $AQCP$ 为菱形；

（3）∵正方形面积为 96，

，∴正方形的边长为：$4\sqrt{6}$，∴$PQ=\sqrt{2}\times4\sqrt{6}=8\sqrt{3}$；

分两种情况：

①如图 1 所示：作 $PM\perp BC$ 于 M，

则 $PM=AB=8$，$DP=BQ=t$，$AP=BM=16-t$，

由勾股定理得：$QM=\sqrt{PQ^2-PM^2}=8\sqrt{2}$，

$BM=BQ+QM$，

∴$t+8\sqrt{2}=16-t$，

解得：$t=8-4\sqrt{2}$；

②如图 2 所示：$DP=BQ=t$，$AP=BM=16-t$，

∵$BQ=BM+QM$，

∴$16-t+8\sqrt{2}=t$，

解得：$t=8+4\sqrt{2}$；

综上所述，以 PQ 为对角线的正方形面积为 96 时 t 的值为：$8-4\sqrt{2}$ 或 $8+4\sqrt{2}$；

（4）连接 AC、BD，AC、BC 相交于点 E，

则整个运动当中，线段 PQ 扫过的面积是：△AED 的面积+△BEC 的面积，如图 3 所示：

∵△AED 的面积+△BEC 的面积$=\frac{1}{2}$矩形 $ABCD$ 的面积，

∴整个运动当中，线段 PQ 扫过的面积$=\frac{1}{2}$矩形 $ABCD$ 的面积$=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times8\times16=64$.

故答案为：64.

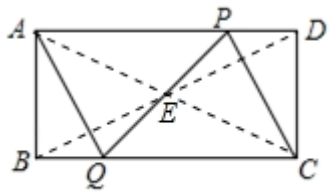


图 3

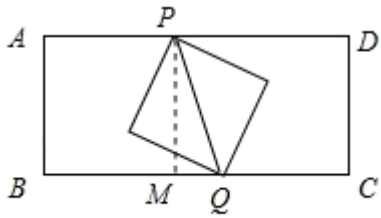


图 2

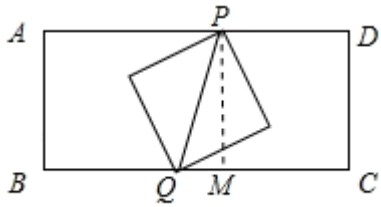


图 1

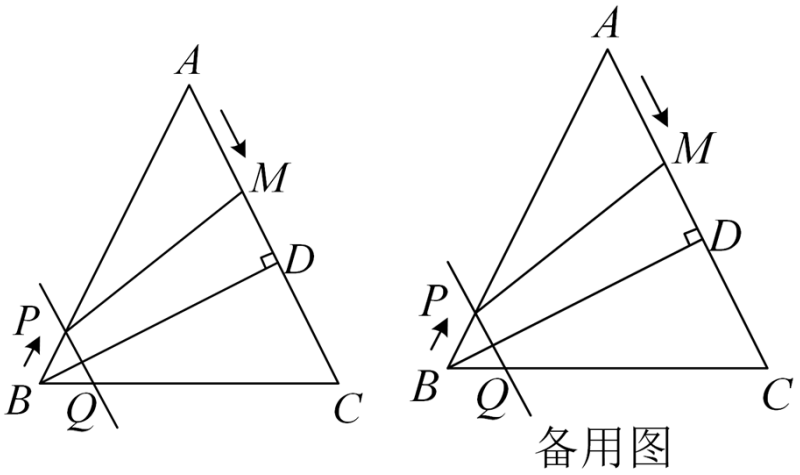
【点睛】本题考查了正方形的判定与性质、矩形的判定与性质、菱形的判定、勾股定理、平行四边形的判定、三角形面积公式以及分类讨论等知识；熟练掌握正方形的判定与性质和勾股定理是解题关键.

5．已知，如图，在△ABC 中，AB=AC=20cm，BD⊥AC 于 D，且 BD=16cm．点 M 从点 A 出发，沿 AC 方向匀速运动，速度为 4cm/s；同时点 P 由 B 点出发，沿 BA 方向匀速运动，速度为 $l$cm/s，过点 P 的动直线 PQ∥AC，交 BC 于点 Q，连结 PM，设运动时间为 t(s)(0＜t＜5)，解答下列问题：

（1）线段 AD=___cm；

（2）求证：PB=PQ；

（3）当 t 为何值时，以 P、Q、D、M 为顶点的四边形为平行四边形.



备用图

【答案】（1）AD=12cm；（2）证明见解析；（3）t=$\frac{12}{5}$$s$ 或 4s

【分析】（1）由勾股定理求出 AD 即可；

（2）由等腰三角形的性质和平行线的性质得出∠PBQ=∠PQB，再由等腰三角形的判定定理即可得出结论；

（3）分两种情况：①当点 M 在点 D 的上方时，根据题意得：$PQ=BP=t$，$AM=4t$，$AD=12$，得出 $MD=AD-AM=12-4t$，由 $PQ\parallel MD$，当 $PQ=MD$ 时，四边形 $PQDM$ 是平行四边形，得出方程，解方程即可；

②当点 M 在点 D 的下方时，根据题意得：$PQ=BP=t$，$AM=4t$，$AD=12$，得出 $MD=AM-AD=4t-12$，由 $PQ\parallel MD$，当 $PQ=MD$ 时，四边形 $PQDM$ 是平行四边形，得出方程，解方程即可．

【详解】（1）解：$\because BD\perp AC$，

$\therefore\angle ADB=90°$，

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12(\text{cm})$，

故答案为：12；

（2）证明：$\because AB=AC$，

$\therefore\angle ABC=\angle C$，即$\angle PBQ=\angle C$，

$\because PQ\parallel AC$，

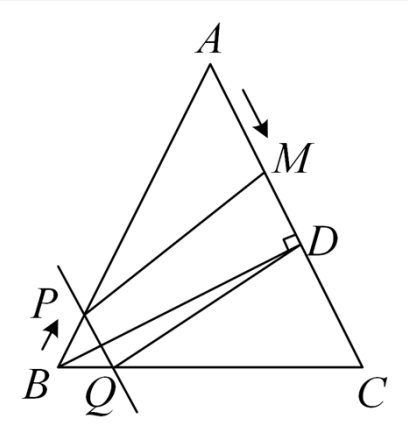
$\therefore\angle PQB=\angle C$，

$\therefore\angle PBQ=\angle PQB$，

$\therefore PB=PQ$；

（3）分两种情况：

①当点 M 在点 D 的上方时，如图所示



根据题意得：$PQ=BP=t$，$AM=4t$，$AD=12$，

$\therefore MD=AD-AM=12-4t$，

$\because PQ\parallel AC$，

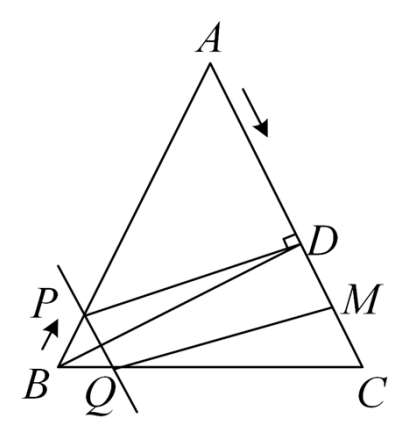
$\therefore PQ\parallel MD$，

当 $PQ=MD$ 时，四边形 $PQDM$ 是平行四边形，

$\therefore t=12-4t$，

解得：$t=\frac{12}{5}$（s）；

②当点 M 在点 D 的下方时，如图所示：



根据题意得：$PQ=BP=t$，$AM=4t$，$AD=12$，

$\therefore MD=AM-AD=4t-12$，

$\because PQ\parallel AC$，

$\therefore PQ\parallel MD$，

当 $PQ=MD$ 时，四边形 $PQDM$ 是平行四边形，

$\therefore t=4t-12$，

解得：$t=4$（s）；

综上所述，当 $t=\frac{12}{5}s$ 或 $t=4s$ 时，以 P、Q、D、M 为顶点的四边形为平行四边形．

【点睛】本题是四边形综合题目，考查了平行四边形的判定、等腰三角形的判定与性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质、三角形面积公式以及分类讨论等知识；本题综合性强，熟练掌握平行四边形的判定方法，进行分类讨论是解决问题（3）的关键．

6．平面直角坐标系中，矩形 $AOBC$ 的顶点 C 的坐标为（m，n），m、n 满足

$m-8=\sqrt{n-4}+\sqrt{4-n}$．

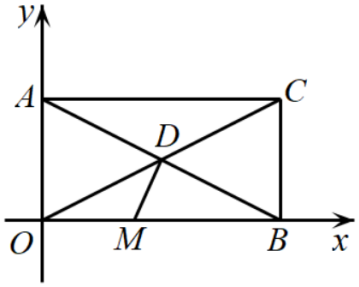


图1

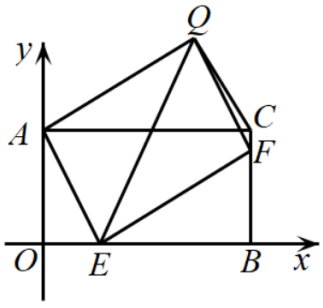


图2

(1)m＝_____，n＝_____；

(2)如图 1，连接 AB、OC 交于点 D，过点 D 作 $DM\perp DB$ 交 x 轴于点 M，求点 M 的坐标；

(3)如图 2，E、F 分别为 OB、BC 上的动点，以 AE、EF 为边作矩形 $AEFQ$，连接 EQ、CQ，当 EQ＝2CQ 时，求点 Q 的纵坐标.

【答案】(1)4；8；

(2)M（3，0）

(3)$\frac{8+8\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）根据由二次根式的性质可得 n＝4，m＝8；

（2）连接 AM，首先利用勾股定理求出 AB 的长，根据垂直平分线的性质可得 AM=BM，设 $M\left(a,0\right)$，Rt$\triangle AOM$ 中勾股定理即可求解；

（3）连接 AF 交 EQ 于点 P，连接 CP，过点 Q 作 $QH\perp y$ 轴于点 H，交 BC 的延长线于 G，设 CE 交 QF 于 N，利用矩形的性质以及直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，可得 $PQ=PC=QC$，可得$\triangle PCQ$是等边三角形，进而根据三角形内角和定理以及三角形外角的性质，等边对等角得出 $\angle OAE=30°$，利用含 30°角的直角三角形的性质以及勾股定理，从而解决问题.

（1）

解：由$\sqrt{n-4}$有意义得：n - 4≥0，

∴n≥4，

由$\sqrt{4-n}$有意义得：4 - n≥0，

∴n≤4，

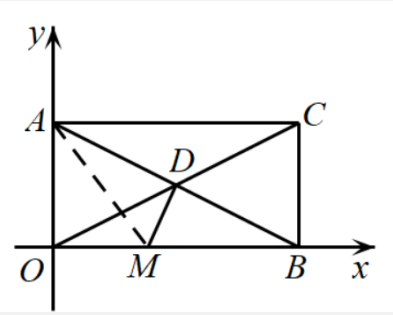
∴n＝4，

把 n＝4 代入 m - 8$=\sqrt{n-4}+\sqrt{4-n}$得：m＝8，

故答案为：4；8；

（2）

连接 AM，如图，



∵$m=8$，$n=4$，

∴C（8，4），

∵四边形 $AOBC$ 是矩形，

∴$AO=4$，$BO=8$，$AD=BD$，

∵$DM\perp DB$，

$\therefore AM=BM$，

设 $M(a,0)$，则 $OM=a, BM=AM=8-a$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中，$AM^2=OM^2+AO^2$

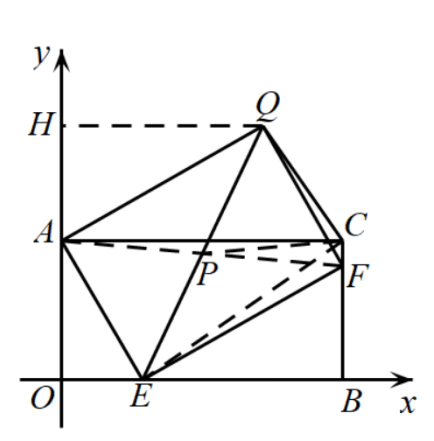
$(8-a)^2=a^2+4^2$

解得 $a=3$

$\therefore M(3,0)$

（3）

如图，连接 AF 交 EQ 于点 P，连接 CP，过点 Q 作 $QH\perp y$ 轴于点 H，



∵四边形 $AEFQ$ 是矩形，

∴$AF=EQ$，$PF=PA=\frac{1}{2}AF$，$PE=PQ=\frac{1}{2}EQ$，$\angle QAE=\angle AEF=\angle EFQ=90°$，$AQ=EF$，

∴$PF=\frac{1}{2}EQ$，

∵四边形 $AOBC$ 是矩形，

∴$\angle ACB=\angle OBC=\angle AOB=90°$，

又∵$PF=PA$，

∴$PC=PF=\frac{1}{2}AF$，

∴$PC=\frac{1}{2}EQ$，

∴$PC=PE=PQ$，

∵$EQ=2CQ$，

∴$PQ=PC=QC$

∴△PCQ 是等边三角形，

∴$\angle CPQ=60°$

∵$PC=PE$，

∴$\angle QEC=30°$，

设$\angle CEF=\alpha$，

则$\angle PEF=\angle PFE=30°+\alpha$，

∴$\angle QPF=\angle PEF+\angle PFE=60°+2\alpha$，

∵$\angle QPC=60°$，

∴$\angle CPF=2\alpha$，

∵$PC=PA$，

∴$\angle PAC=\angle PCA=\alpha$，

∵$\angle AEF=90°$，$\angle PFE=30°+\alpha$，

∴$\angle EAF=60°-\alpha$，

∴$\angle EAC=\angle EAF+\angle PAC=60°-\alpha+\alpha=60°$，

∵$\angle OAC=90°$，

∴$\angle OAE=30°$，

∴$\angle AEO=60°$，

∵$\angle AEF=90°$，

∴$\angle FEB=30°$，

在 $Rt△AOE$ 中，$\angle OAE=30°$，$AO=4$，

∴$OE=\frac{\sqrt{3}}{3}AO=4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BE=BO-OE=8-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

在 $Rt\triangle BEF$ 中，$\angle BEF=30°$，

$\therefore EF=\frac{2\sqrt{3}}{3}BE=\frac{16\sqrt{3}-8}{3}$

$\therefore AQ=EF=\frac{16\sqrt{3}-8}{3}$，

在 $Rt\triangle AQH$ 中，$\angle QAH=60°$，

$\therefore \angle AQH=30°$，

$\therefore AH=\frac{1}{2}AQ=\frac{1}{2}\times\frac{16\sqrt{3}-8}{3}=\frac{8\sqrt{3}-4}{3}$，

$\therefore OH=AO+AH=4+\frac{8\sqrt{3}-4}{3}=\frac{8+8\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 点 Q 的纵坐标为 $\frac{8+8\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题是四边形综合题，主要考查了矩形性质，二次根式的非负性，含 30°角的直角三角形的性质，相似三角形的判定与性质等知识，证明$\angle OAE=30°$是解决问题（3）的关键.

7．如图，点 P 为正方形 $ABCD$ 的对角转 AC 上一动点，过点 P 作 $PE\perp PB$ 交射线 DC 于点 E.

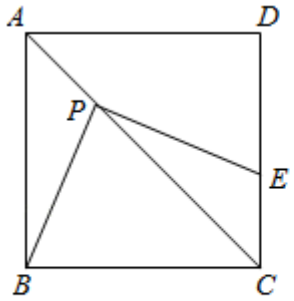


图1

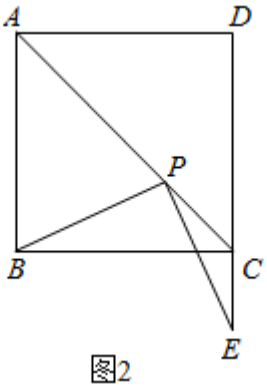


图2

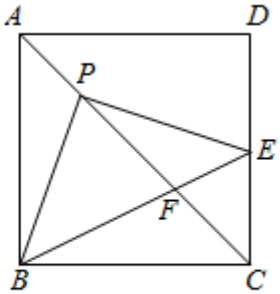


图3

（1）如图 1，当点 E 在边 CD 上时，求证：$PB=PE$；

（2）如图 2，当点 E 在 DC 的延长线上时，探求线段 PA、PC、CE 的数量关系并加以证明；

（3）如图 3，在（1）的条件下，连接 BE 交 AC 于点 F，若正方形 $ABCD$ 的边长为 4，当点 E 为 CD 的中点，则 $PF=$____（请直接写出结果）.

【答案】（1）见解析；（2）$AP-PC=\sqrt{2}EC$．证明见解析；（3）$\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

【分析】（1）如图 1，连接 PD．分别证明 $PB=PD$，$PE=PD$ 即可证明结论.

（2）结论：$AP-PC=\sqrt{2}EC$．如图 2 中，过点 P 作 $PT\perp PC$ 交 BC 于 T，过点 T 作 $TH\perp BC$ 交 AC 于 H，过点 H 作 $HK\perp AB$ 于 K，设 PE 交 BC 于点 O．想办法证明 $HK=BT=EC$，$PC=PH$，$AH=\sqrt{2}HK$，即可证明结论；

（3）如图 3 中，过点 P 作 $PL\perp BE$ 于 L，过点 F 作 $FQ\perp CD$ 于 Q，$FJ\perp BC$ 于 J．想办法求出 PL，LF，再利用勾股定理，即可证明结论．

【详解】（1）证明：如图 1，连接 PD．

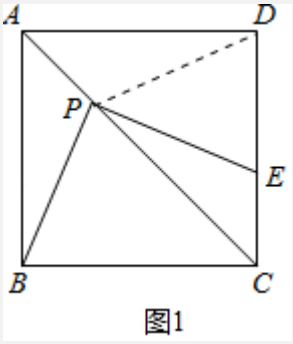


图1

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$CB=CD$，$\angle PCB=\angle PCD=45°$，

在△PCB 和△PCD 中，

$$\begin{cases} CB=CD \\ \angle PCB=\angle PCD \\ CP=CP \end{cases},$$

∴△PCB≌△PCD（SAS），

∴$PB=PD$，$\angle CBP=\angle CDP$，

∵$PE\perp PB$，

∴$\angle BPE=\angle BCE=90°$，

∴$\angle CBP+\angle CEP=180°$，

∵$\angle CEP+\angle PED=180°$，

∴$\angle PED=\angle CBP$，

∴$\angle PED=\angle CDP$，

∴$PE=PD$，

∴$PB=PE$；

（2）解：结论：$AP-PC=\sqrt{2}EC$．理由如下：

如图 2，过点 P 作 $PT\perp PC$ 交 BC 于 T，过点 T 作 $TH\perp BC$ 交 AC 于 H，过点 H 作 $HK\perp AB$ 于 K，设 PE 交 BC 于点 O．

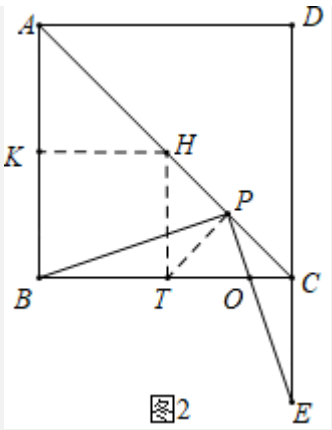


图2

∵∠ECO＝∠BPO＝90°，∠EOC＝∠BOP，

∴∠E＝∠PBT，

∵∠BPE＝∠TPC＝90°，

∵∠BPT＝∠EPC，

∵∠PCE＝∠PTC＝45°，

∴PT＝PC，

在△BPT 和△EPC 中，

$$\begin{cases} \angle PBT = \angle E \\ \angle BPT = \angle EPC \\ PT = PC \end{cases},$$

∴△BPT≌△EPC（AAS），

∴BT＝EC，

∵HT⊥BC，

∴∠TCH＝∠THC＝45°，

∴CT＝TH，

∵TP⊥CH，

∴PC＝PH，

∵HK⊥AB，

∴∠HKB＝∠KBT＝⊥HTB＝90°，

∴四边形 BTHK 是矩形，

∴HK＝BT＝EC，

∵∠AKH＝90°，∠KAH＝45°，

∴AH＝$\sqrt{2}$ KH＝$\sqrt{2}$ EC，

∵PA - PC＝PA - PH＝AH，

∴$PA-PC=\sqrt{2}EC$；

（3）解：如图 3 中，过点 P 作 $PL\perp BE$ 于 L，过点 F 作 $FQ\perp CD$ 于 Q，$FJ\perp BC$ 于 J.

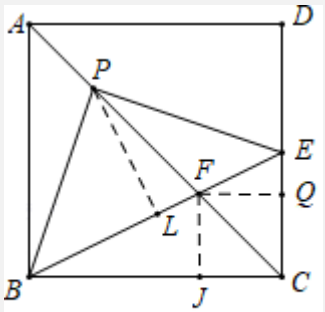


图3

∵$BC=CD=4$，$CE=ED=2$，$\angle BCE=90°$，

∴$BE=\sqrt{EC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，

∵△BPE 是等腰直角三角形，$PL\perp BE$，

∴$BL=EL=\sqrt{5}$，

∴$PL=\frac{1}{2}BE=\sqrt{5}$，

∵FC 平分$\angle BCE$，$FQ\perp CD$，$FJ\perp BC$，

∴$FQ=FJ$，

∵$\frac{S_{\Delta ECF}}{S_{\Delta BCF}}=\frac{EF}{BF}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot FQ}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot FJ}=\frac{1}{2}$，

∴$EF=\frac{1}{3}BE=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

∴$FL=LE-EF=\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

∴$PF=\sqrt{FL^2+PL^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2+(\sqrt{5})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】本题主要考查了正方形的性质、矩形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理的应用，灵活运用相关知识成为解答本题的关键.

8．如图，我们把对角线互相垂直的四边形叫做“垂美四边形”.

（1）性质探究：如图 1．已知四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$．垂足为 O，求证：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$；

（2）解决问题：已知 $AB=5\sqrt{2}$．$BC=4\sqrt{2}$，分别以△ABC 的边 BC 和 AB 向外作等腰 $Rt\triangle BCE$ 和等腰 $Rt\triangle ABD$；

①如图 2，当$\angle ACB=90°$，连接 DE，求 DE 的长；

②如图 3．当∠ACB≠90°，点 G、H 分别是 AD、AC 中点，连接 GH．若 $GH=2\sqrt{6}$，则 $S_{\triangle}ABC$ ＝____．

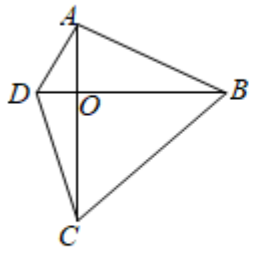


图1

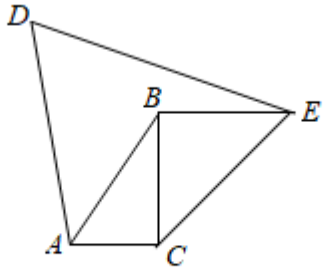


图2

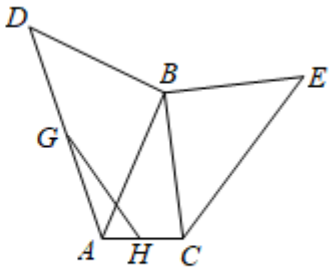


图3

【答案】（1）见解析；（2）①$\sqrt{146}$；②$\frac{7}{2}$

【分析】（1）根据 $AC\perp BD$ 可以得到$\angle AOB=\angle COD=90°$即可得到 $AB^2=AO^2+OB^2$，$CD^2=DO^2+OC^2$即 $AB^2+CD^2=AO^2+OB^2+DO^2+OC^2$同理可以得到 $AD^2+BC^2=AO^2+OB^2+DO^2+OC^2$即可得到答案；

（2）连 DC、AE 相交于点 F，先证明$\triangle ABE\cong\triangle DBC$ 得到$\angle CDB=\angle BAE$ 从而证得 $AE\perp CD$ 再利用勾股定理和（1）中的结论求解即可得到答案；

（3）连 DC、AE 相交于点 F，作 $CP\perp BD$ 交 DB 延长线于点 P，$BP^2+CP^2=BC^2=(4\sqrt{2})^2=32$，$DP^2+PC^2=DC^2=(4\sqrt{6})^2=96$，$(DP^2+PC^2)-(BP^2+CP^2)=96-32=64$，$DP^2-BP^2=64$ 从而求出 $BP=\frac{7}{10}\sqrt{2}$，再证明 $AB\parallel PC$ 则 $S_{\triangle}ABC=\frac{1}{2}AB\times BP$.

【详解】解：（1）证明：∵$AC\perp BD$

∴$\angle AOB=90°$

在 $Rt\triangle AOB$ 中 $AB^2=AO^2+OB^2$

∴$\angle COD=90°$

在 $Rt\triangle COD$ 中 $CD^2=DO^2+OC^2$

∴$AB^2+CD^2=AO^2+OB^2+DO^2+OC^2$

同理 $AD^2+BC^2=AO^2+OB^2+DO^2+OC^2$

∴$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

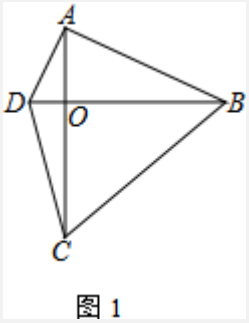


图 1

(2) ①解：连 DC、AE 相交于点 F

∵$Rt\triangle BCE$ 和 $Rt\triangle ABD$ 是等腰三角形

∴$BE=BCAB=BD$

$\angle CBE=\angle ABD=90°$

∴$\angle ABE=\angle DBC=90°+\angle ABC$

∴$\triangle ABE\cong\triangle DBC$

∴$\angle CDB=\angle BAE$

∵$\angle ABD=90°$

∴$\angle CDB+\angle CDA+\angle DAB=90°$

∴$\angle BAE+\angle CDA+\angle DAB=90°$

∴$\angle AFD=90°$

∴$AE\perp CD$

∵$AB=5\sqrt{2}$，$BC=4\sqrt{2}$ $\angle ACB=90°$

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3\sqrt{2}$

∵$AB=5\sqrt{2}$，$BD=5\sqrt{2}$ $\angle ABD=90°$

∴$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=10$

∵$BC=4\sqrt{2}$，$BE=4\sqrt{2}$ $\angle CBE=90°$

∴$CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=8$

由（1）中结论 $AD^2+EC^2=AC^2+DE^2$

∴$(10)^2+（8）^2=（3\sqrt{2}）^2+DE^2$

∴$DE=\sqrt{146}$

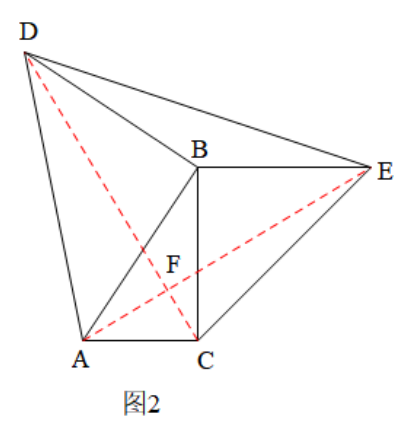


图2

②连 DC、AE 相交于点 F

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/548077025110006112