

# 假设检验

- 第一节 假设检验的基本思想与概念
- 第二节 单正态总体参数的假设检验
- 第三节 双正态总体参数的假设检验

在本章中，我们将讨论不同于参数估计的另一类重要的统计推断问题。这就是根据样本的信息检验关于总体的某个假设是否正确。

这类问题称作假设检验问题。

比如，对于正态总体，提出数学期望等于 $\mu_0$ 的假设。

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断：是接受，还是拒绝。

# 第一节 假设检验的基本思想与概念

- 一、女士品茶
- 二、假设检验的思想
- 三、实例分析
- 四、假设检验的步骤
- 五、假设检验的两类错误

# 一、女士品茶



**R.A.Fisher**  
(1890~1962)

女士品茶这个故事最早出现在英国统计学家费希尔（Fisher）发表于1935年的著作《the design of experiments》中被用来描述原假设.



方案一：先倒茶后倒奶(TM)

方案二：先倒奶后倒茶(MT)



结果

10杯全部说对

大家相信该女士确实有此本事！

女士品茶



假设检验

## 1、提出要检验的一对假设

$H_0$ : 该女士无此鉴别能力

$H_1$ : 该女士有鉴别能力

## 2、假如 $H_0$ 是对的，那么连续10杯都猜对的概率是多少？

$$p=0.5^{10}\approx 0.001$$

这是一个小概率。

猜对9杯呢？

$$p=10*0.5^{10}+0.5^{10}\approx 0.01$$

## 3、作结论：拒绝 $H_0$ ，接受 $H_1$ ，认为该女士确有鉴别能力。

## 二、假设检验的思想

1、提出假设： $H_0(H_1)$

2、计算概率：如果假设 $H_0$ 成立，得到现在的样本结果的可能性有多大？

3、推断结论：

得到现有结果的可能性很小(小概率)

**拒绝 $H_0$**

得到现有结果不是小概率

**没有理由拒绝 $H_0$**

### 三、实例分析

**例1** 某生产流水线上用一台自动包装机包装袋装白糖,按标准每袋白糖重(克) $X \sim N(500, 1.5)$ . 一段时间后,为检验包装机是否发生了漂移,随机抽取了9袋白糖,测得重量为 $x_1, x_2, \dots, x_9$ ,其均值为499.12(克),问包装机是否发生了漂移?

1. 工作正常,也就是白糖重量的均值 $\mu = 500$ .

随机误差?

2. 发生了漂移,也就是白糖重量的均值 $\mu \neq 500$ .

本质差异?



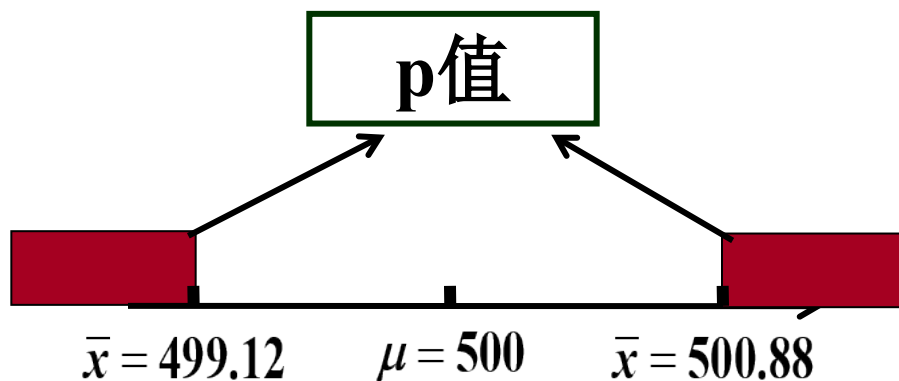
## 要检验的假设是

$H_0$ : 工作正常, 即  $\mu = 500$  ;

$H_1$ : 发生了漂移, 即  $\mu \neq 500$  .

称  $H_0$  为原假设(零假设);  $H_1$  为备择假设.

假如  $H_0$  是正确的

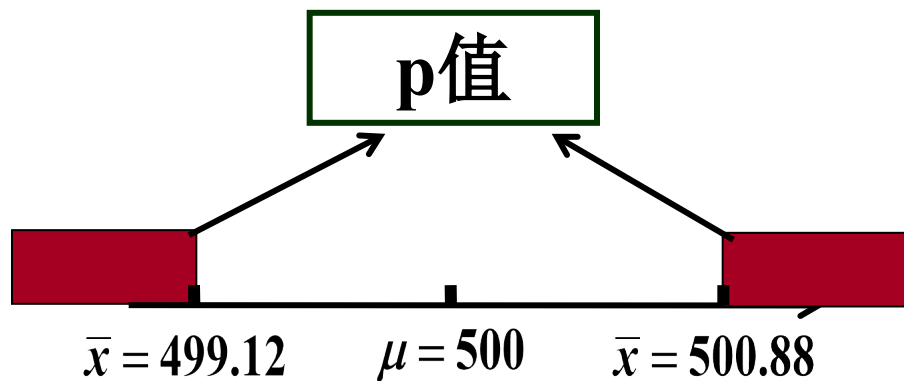


## 检验统计量

$$Z = \frac{\bar{X} - 500}{\sqrt{1.5 / \sqrt{9}}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{p值} = P(|\bar{X} - 500| \geq 0.88)$$

假如 $H_0$ 是正确的



检验统计量

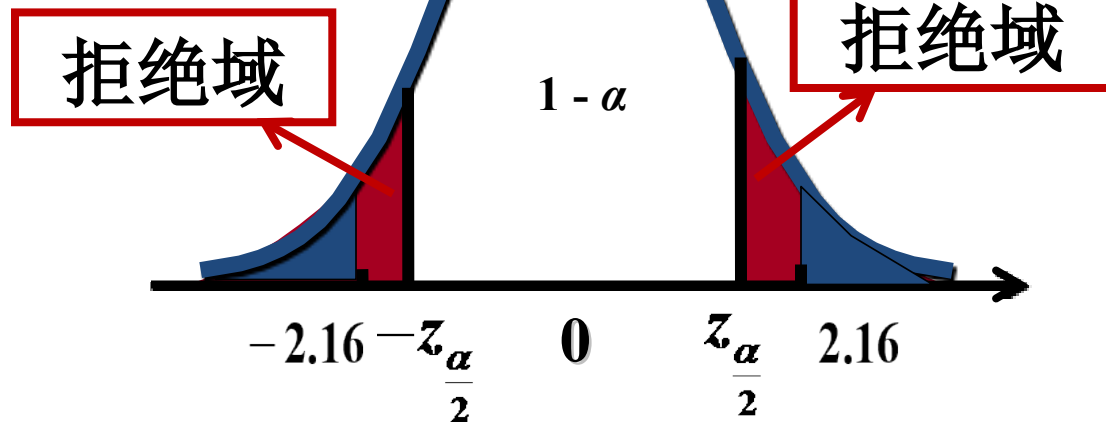
$$Z = \frac{\bar{X} - 500}{\sqrt{1.5 / \sqrt{9}}} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{p值} &= P(|\bar{X} - 500| \geq 0.88) \\ &= 2(1 - \Phi(2.16)) = 0.031 \end{aligned}$$

取显著性水平 $\alpha=0.05$   
(小概率标准)

拒绝域

$$W = \{ |Z| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \} = \{ |Z| \geq Z_{0.025} \} = \{ |Z| \geq 1.96 \}$$



## 四、假设检验的步骤

1、根据实际问题，建立假设(取 $\alpha=0.05$ )

$$H_0: \mu=500 \quad H_1: \mu \neq 500$$

2、选择检验统计量，确定拒绝域

$$Z = \frac{\bar{X} - 500}{\sqrt{1.5 / \sqrt{9}}} \sim N(0,1)$$

拒绝域  $W = \{|Z| \geq 1.96\}$       计算  $|Z| = \left| \frac{499.12 - 500}{\sqrt{1.5 / \sqrt{9}}} \right| = 2.16$

3、结论

$$p\text{值}=0.031$$

拒绝 $H_0$ ，接受 $H_1$ ，认为包装机发生了漂移，这样做犯错误的概率不超过 $\alpha=0.05$ 。



1、在女士品茶的故事中，为什么设原假设 $H_0$ 为她没有鉴别能力？而不是反过来？

实例分析中，同样为什么设原假设  $H_0: \mu = 500$ ？而不是  $\mu \neq 500$ ？

2、如果拒绝了 $H_0$ ，我们可以比较放心的使用 $H_1$ ，因此决定犯错误的概率很小，不超过 $\alpha$ ；

反之，如果没有拒绝 $H_0$ ，即接受 $H_0$ ，我们可以放心使用吗？犯错的概率又是多少？

## 五、假设检验的两类错误

由于样本具有随机性，因此，当我们利用样本判断时，可能会犯两类错误：

真实情况 (未知)	所作决策	
	样本未落入拒绝域 接受 $H_0$	样本落入拒绝域 拒绝 $H_0$
$H_0$ 为真	正确	第一类错误
$H_0$ 不真	第二类错误	正确

第一类(弃真):  $P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\} = \alpha$ ,

第二类(取伪):  $P\{\text{接受}H_0|H_0\text{不真}\} = \beta$ .

一般  $\alpha \downarrow$ , 则  $\beta \uparrow$ ;  $\alpha \uparrow$ , 则  $\beta \downarrow$ .

即  $\alpha$  与  $\beta$  不能同时控制.

因此, 只对犯第一类错误(弃真)的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误(取伪)的概率, 这类假设检验称为显著性假设检验.  $\alpha$ 称为显著性水平.

一般,  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ 等.

## 选取原假设的原则

$$H_0: \mu = 500 \quad H_1: \mu \neq 500$$

一般，我们将感兴趣的一对结论写为假设

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$$

由于我们只控制犯第一类错误的概率，显著性水平 $\alpha$ 越小，拒绝域就越小，否定原假设就越困难，换言之，对原假设的保护程度越大。

在实际工作中，往往把  
不轻易否定的命题  
作为原假设。

比如，工艺要求，老的方案，  
现有状态等

与 $H_0$ 对立的，  
需要强有力证据支持  
的命题作为备择假设。

## 第二节 单正态总体参数的假设检验

- 一、单正态总体均值  $\mu$  的假设检验
- 二、单正态总体方差  $\sigma^2$  的假设检验



设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，抽取容量为 $n$ 的样本

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

样本均值和样本方差分别为

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

针对正态总体的参数 $\mu$ 和 $\sigma^2$ 进行检验。

# 一、单正态总体均值 $\mu$ 的假设检验

考虑三种关于均值 $\mu$ 的假设检验问题：

$$1. \quad H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$2. \quad H_0 : \mu \geq \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$3. \quad H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

第一种情形，备择假设 $H_1$ 在原假设 $H_0$ 两侧时的检验称为**双侧检验**，此时拒绝域在两侧。

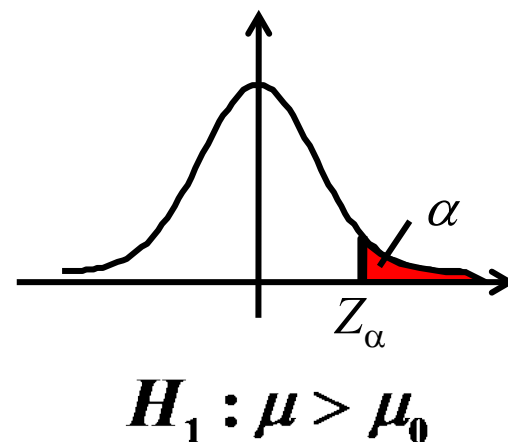
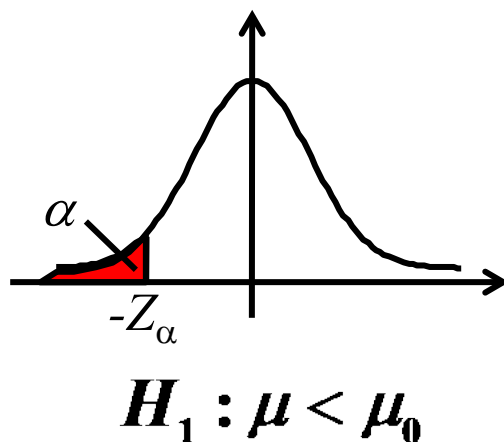
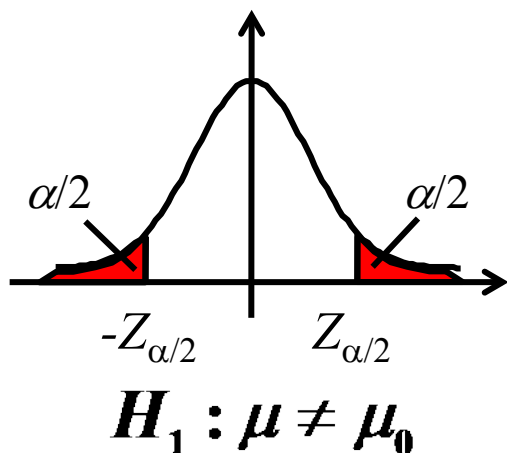
第二三种情形，当备择假设 $H_1$ 在原假设 $H_0$ 一侧时的检验称为**单侧检验**，此时拒绝域在一侧。

## (一) 已知 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ，关于 $\mu$ 的Z检验

由于均值 $\mu$ 的点估计是 $\bar{X}$ ，故选用检验统计量

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

是合适的. 三种情形对应的拒绝域分别如下



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/548106060130006142>