

基本不等式

考纲原文

基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a \geq 0, b \geq 0)$

(1) 了解基本不等式的证明过程.

(2) 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.



一、基本不等式

1. 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

(1) 基本不等式成立的条件: $a > 0, b > 0$.

(2) 等号成立的条件, 当且仅当 $a = b$ 时取等号.

2. 算术平均数与几何平均数

设 $a > 0, b > 0$, 则 a, b 的算术平均数为 $\frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $\sqrt{ab}$, 基本不等式可叙述为: 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 利用基本不等式求最值问题

(1) 如果积 xy 是定值 P , 那么当且仅当 $x = y$ 时, $x+y$ 有最小值是 $2\sqrt{P}$. (简记: 积定和最小)

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 P , 那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值是 $\frac{P^2}{4}$. (简记: 和定积最大)

4. 常用结论

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$

(2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 (a, b \text{ 同号})$

(3) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (a, b \in \mathbf{R})$

(4) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2} (a, b \in \mathbf{R})$

$$(5) 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 (a, b \in \mathbf{R})$$

$$(6) \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{4} \geq ab (a, b \in \mathbf{R})$$

$$(7) \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (a > 0, b > 0)$$

二、基本不等式在实际中的应用

1. 问题的背景是人们关心的社会热点问题，如物价、销售、税收等.

题目往往较长，解题时需认真阅读，从中提炼出有用信息，建立数学模型，转化为数学问题求解；

2. 经常建立的函数模型有正(反)比例函数、一次函数、二次函数、分段函数以及 $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ 等.

解答函数应用题中的最值问题时一般利用二次函数的性质，基本不等式，函数的单调性或导数求解.



考向一 利用基本不等式求最值

利用基本不等式求最值的常用技巧：

(1) 若直接满足基本不等式条件，则直接应用基本不等式.

(2) 若不直接满足基本不等式条件，则需要创造条件对式子进行恒等变形，如构造“1”的代换等. 常见的变形手段有拆、并、配.

①拆——裂项拆项

对分子的次数不低于分母次数的分式进行整式分离——分离成整式与“真分式”的和，再根据分式中分母的情况对整式进行拆项，为应用基本不等式凑定积创造条件.

②并——分组并项

目的是分组后各组可以单独应用基本不等式，或分组后先由一组应用基本不等式，再组与组之间应用基本不等式得出最值.

③配——配式配系数

有时为了挖掘出“积”或“和”为定值，常常需要根据题设条件采取合理配式、配系数的方法，使配式与待求式相乘后可以应用基本不等式得出定值，或配以恰当的系数后，使积式中的各项之和为定值.

(3) 若一次应用基本不等式不能达到要求，需多次应用基本不等式，但要注意等号成立的条件必须要一致.

注：若可用基本不等式，但等号不成立，则一般是利用函数单调性求解.

典例引领

典例 1 若正数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，则 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为

A. 1

B. 6

C. 9

D. 16

【答案】B

【解析】解法一：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $a+b=ab \Rightarrow (a-1) \cdot (b-1) = 1$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a-1} \cdot \frac{9}{b-1}} = 2 \times 3 = 6$ (当且仅当 $a = \frac{4}{3}$ ， $b = 4$ 时取“=”).

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

解法二：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $a+b=ab$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = \frac{b-1+9a-9}{ab-a-b+1} = b+9a-10 = (b+9a) \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - 10 = \frac{b}{a} + \frac{9a}{b} + 1 + 9 - 10 \geq$

$2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} = 6$ (当且仅当 $a = \frac{4}{3}$ ， $b = 4$ 时取“=”).

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

解法三：因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，所以 $b-1 = \frac{1}{a-1}$ ，

所以 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1} = (b-1) + \frac{9}{b-1} \geq 2\sqrt{9} = 6$ (当且仅当 $b=4$ 时取“=”).

故 $\frac{1}{a-1} + \frac{9}{b-1}$ 的最小值为 6.

【名师点睛】在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是“一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得”，若忽略了某个条件，就会出现错误.

变式拓展

1. 函数 $f(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x} (x > 0)$ 的最大值为____，此时 x 的值为_____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/548107060005007012>