

2024 年春季高二年级入学暨寒假作业检测联考

数学

时量：120 分钟 满分：150 分

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，满分 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 命题“ $\exists x > 1, x^2 + 1 < 0$ ”的否定为 ()

A. $\exists x \leq 1, x^2 + 1 < 0$

B. $\exists x \leq 1, x^2 + 1 \leq 0$

C. $\forall x > 1, x^2 + 1 \geq 0$

D. $\forall x > 1, x^2 + 1 < 0$

2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 2i$ ，则 z 在复平面内对应的点的坐标为 ()

A. (1,1)

B. (-1,1)

C. (1,-1)

D. (-1,-1)

3. 下列各式化简结果正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 0$

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$

4. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^9$ 的展开式中常数项为 ()

A. -84

B. -672

C. 84

D. 672

5. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ ，则 $\tan \alpha =$ ()

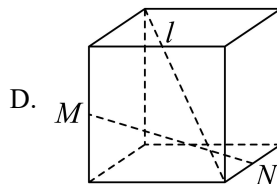
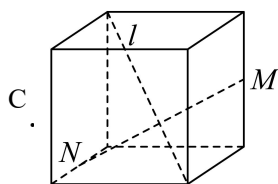
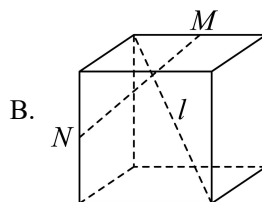
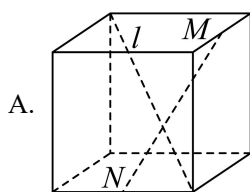
A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

6. 如图，在下列各正方体中， l 为正方体的一条体对角线， M 、 N 分别为所在棱的中点，则满足 $MN \perp l$ 的是 ()



7. 直线 $(a^2+1)x-2ay+1=0$ 的倾斜角的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ D. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

8. 在数学和许多分支中都能见到很多以瑞士数学家欧拉命名的常数、公式和定理，如：欧拉函数 $\varphi(n)$

($n \in \mathbb{N}^*$) 的函数值等于所有不超过正整数 n 且与 n 互素的正整数的个数，(互素是指两个整数的公约数只有 1)，例如： $\varphi(1)=1$ ； $\varphi(3)=2$ (与 3 互素有 1, 2)； $\varphi(9)=6$ (与 9 互素有 1, 2, 4, 5, 7, 8). 记 S_n 为数列 $\{n \cdot \varphi(3^n)\}$ 的前 n 项和，则 $S_{10} =$ ()

- A. $\frac{19}{2} \times 3^{10} + \frac{1}{2}$ B. $\frac{21}{2} \times 3^{10} + \frac{1}{2}$ C. $\frac{19}{4} \times 3^{11} + \frac{3}{4}$ D. $\frac{21}{4} \times 3^{11} + \frac{1}{4}$

二、选择题：本大题共 3 个小题，每小题 6 分，满分 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 设 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $a+2b=2$ ，则 ()

- A. ab 的最大值为 $\frac{1}{2}$ B. $a+b$ 的最小值为 1
C. a^2+b^2 的最小值为 $\frac{4}{5}$ D. $\frac{a-b+2}{ab}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 ()

- A. $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增
B. $f(x)$ 的值域是 $[-1, 1]$
C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称

D. $f\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 为偶函数

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{CC_1}$, 其中 $\lambda \in [0,1]$, $\mu \in [0,1]$, 则下列结论正确的是 ()

A. 当 $B_1P \parallel$ 平面 A_1BD 时, B_1P 不可能垂直 CD_1

B. 若 B_1P 与平面 CC_1D_1D 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 则点 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$

C. 当 $\lambda = \mu$ 时, $|\overrightarrow{DP}| + |\overrightarrow{A_1P}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}$

D. 当 $\lambda=1$ 时, 正方体经过点 A_1 、 P 、 C 的截面面积的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right]$

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分; 共 15 分.

12. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A + \overline{B}) = \frac{1}{2}$, 则 $P(\overline{AB}) =$ _____.

13. 已知圆锥的底面半径为 6, 侧面积为 60π , 则该圆锥的内切球 (圆锥的侧面和底面都与球相切) 的体积为 _____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, F_1, F_2 分别是双曲线的左、右焦点, M 是双曲线右支上一点, 连接 MF_1 交双曲线 C 左支于点 N , 若 $\triangle MNF_2$ 是以 F_2 为直角顶点的等腰直角三角形, 则双曲线的离心率为 _____.

四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1$, $2S_n = na_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = 2b_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 按照如下规律构造新数列 $\{c_n\}$:

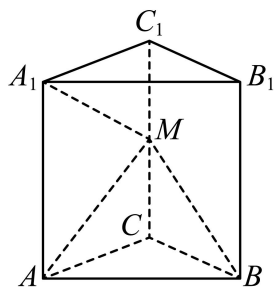
$a_1, b_2, a_3, b_4, a_5, b_6, a_7, b_8, \dots$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

16. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = 2\sqrt{2}$, 且

$$\tan B + \tan C = \frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}.$$

- (1) 求 B 和 b 的值;
- (2) 求 AC 边上高的最大值.

17. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2$, M 为 CC_1 的中点, $\angle A_1MB=120^\circ$.



- (1) 求 CC_1 的长;
- (2) 求二面角 $M-AB-C$ 的余弦值.
18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{6}$. 记 P 的轨迹为 M .

- (1) 求 M 的方程;
- (2) 直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A, B 两点, C, D 为 M 上的两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

19. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-2x(a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 存在单调递减区间, 求实数 a 的取值范围;

- (2) 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 2a-1$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/555143103240012043>