

2022-2023 学年天津市芦台一中高三冲刺高考查漏补缺数学试题

注意事项

1. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回.
2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置.
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符.
4. 作答选择题, 必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑; 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案. 作答非选择题, 必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答, 在其他位置作答一律无效.
5. 如需作图, 须用 2B 铅笔绘、写清楚, 线条、符号等须加黑、加粗.

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知函数 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点, 若函数 $g(x)$ 的图象的纵坐标不变, 横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍后, 得到的函数在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 则 ω 的取值范围是()

- A. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ B. $\left[\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$
C. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right)$ D. $\left(\frac{29}{24}, \frac{35}{24}\right]$

2. 已知集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若集合 $A = \{a_1, a_2\} \subseteq M$, 且对任意的 $b \in M$, 存在 $\lambda, \mu \in \{-1, 0, 1\}$ 使得 $b = \lambda a_1 + \mu a_2$, 其中 $a_i, a_j \in A$, $1 \leq i \leq j \leq 2$, 则称集合 A 为集合 M 的基底. 下列集合中能作为集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的基底的是 ()

- A. $\{1, 5\}$ B. $\{3, 5\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{2, 4\}$

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{4}{3}x$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

4. 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{AD}$ C. $\overrightarrow{BC}$ D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

5. 已知 $y = ax + b$ 与函数 $f(x) = 2 \ln x + 5$ 和 $g(x) = x^2 + 4$ 都相切, 则不等式组 $\begin{cases} x - ay + 3 \geq 0 \\ x + by - 2 \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域在

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 内的面积为 ()

- A. 2π B. 3π C. 6π D. 12π

6. 若函数 $f(x) = x^2 e^x - a$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{4}{e^2}, +\infty)$ B. $(0, \frac{4}{e^2})$ C. $(0, 4e^2)$ D. $(0, +\infty)$

7. 已知复数 z 满足 $z - \bar{z} = 0$ ，且 $z \cdot \bar{z} = 9$ ，则 $z =$ ()

- A. 3 B. $3i$ C. ± 3 D. $\pm 3i$

8. 已知集合 $M = \{x | x^2 = 1\}$ ， N 为自然数集，则下列表示不正确的是 ()

- A. $1 \in M$ B. $M = \{-1, 1\}$ C. $\emptyset \subseteq M$ D. $M \subseteq N$

9. 在三棱锥 $D-ABC$ 中， $AB = BC = CD = DA = 1$ ，且 $AB \perp BC, CD \perp DA$ ， M, N 分别是棱 BC, CD 的中点，下面四个结论：

① $AC \perp BD$ ；

② $MN \parallel$ 平面 ABD ；

③ 三棱锥 $A-CMN$ 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ；

④ AD 与 BC 一定不垂直.

其中所有正确命题的序号是 ()

- A. ①②③ B. ②③④ C. ①④ D. ①②④

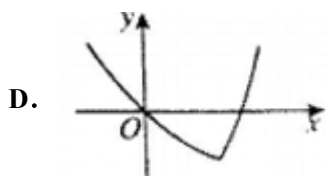
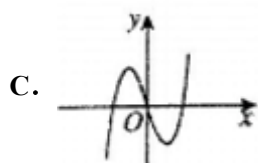
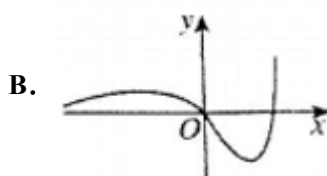
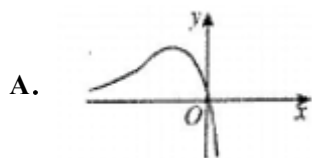
10. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | y = \lg(1-x)\}$ ， $B = \left\{x | y = \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$ 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

11. 已知 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 3$ ，且 $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b})$ ，则 $2\vec{a} - \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影为 ()

- A. $\frac{7}{3}$ B. 14 C. $\frac{20}{3}$ D. 7

12. 当 $a > 0$ 时，函数 $f(x) = (x^2 - ax)e^x$ 的图象大致是 ()



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某市公租房源位于 A, B, C

三个小区，每位申请人只能申请其中一个小区的房子，申请其中任意一个小区的房子是等可能的，则该市的任意 5 位申请人中，恰好有 2 人申请 A 小区房源的概率是_____。（用数字作答）

14.在△ABC 中，BC 为定长， $\left| \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \right|=3\left| \overrightarrow{BC} \right|$ ，若△ABC 的面积的最大值为 2，则边 BC 的长为_____.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1+a_4+a_7=99$ ， $a_2+a_5+a_8=93$ ，若对任意 $n\in N^*$ 都有 $S_n\leq S_k$ 成立，则 k 的值为_____.

16. 四边形 ABCD 中， $\angle A=\frac{5\pi}{6}$ ， $\angle B=\angle C=\frac{5\pi}{12}$ ， $\angle D=\frac{\pi}{3}$ ， $BC=2$ ，则 AC 的最小值是_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知向量 $\overrightarrow{m}=(\cos B,2\cos^2\frac{C}{2}-1)$ ， $\overrightarrow{n}=(c,b-2a)$ 且 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=0$.

- （1）求角 C 的大小；
- （2）若△ABC 的面积为 $2\sqrt{3}$ ， $a+b=6$ ，求 c.

18.（12 分）随着科技的发展，网络已逐渐融入了人们的生活．网购是非常方便的购物方式，为了了解网购在我市的普及情况，某调查机构进行了有关网购的调查问卷，并从参与调查的市民中随机抽取了男女各 100 人进行分析，从而得到表（单位：人）

	经常网购	偶尔或不用网购	合计
男性	50		100
女性	70		100
合计			

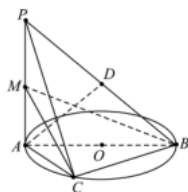
- （1）完成上表，并根据以上数据判断能否在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为我市市民网购与性别有关？
- （2）①现从所抽取的女市民中利用分层抽样的方法抽取 10 人，再从这 10 人中随机选取 3 人赠送优惠券，求选取的 3 人中至少有 2 人经常网购的概率；
- ②将频率视为概率，从我市所有参与调查的市民中随机抽取 10 人赠送礼品，记其中经常网购的人数为 X，求随机变量 X 的数学期望和方差．

参考公式：
$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\geq K_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
------------------	------	------	------	-------	-------	-------	-------

K_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

19. (12分) 如图 AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 为圆周上不同于 A, B 的任意一点



(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC ;

(2) 设 $PA = AB = 2AC = 4$, D 为 PB 的中点, M 为 AP 上的动点 (不与 A 重合) 求二面角 $A-BM-C$ 的正切值的最小值

20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点.

(I) 若线段 MN 的中点坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 求直线 l 的方程;

(II) 若直线 l 过点 $(4, 0)$, 点 $P(x_0, 0)$ 满足 $k_{PM} + k_{PN} = 0$ (k_{PM}, k_{PN} 分别为直线 PM, PN 的斜率), 求 x_0 的值.

21. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} a_n + \frac{1}{2^n}, n \in N^*$.

(I) 证明: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n \geq 2$ ($n \in N^*$);

(II) 证明: $a_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} a_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} a_2 + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} a_n + 2 - \frac{1}{2^n} (n \in N^*)$;

(III) 证明: $a_n < \frac{43}{42} \sqrt{e} - 1, e$ 为自然常数.

22. (10分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $2^1 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + 2^3 \cdot a_3 + \dots + 2^n \cdot a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 对一切 $n \in N^*$ 成立.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据题意， $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right)$ ，求出 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，根据三角函数图像平移伸缩，即可求出 ω 的取值范围。

【详解】

已知 $f(x) = \cos x$ 与 $g(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0, \varphi < \pi$) 的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，

$$\text{则 } \cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \varphi \right),$$

$$\text{Q } \frac{2\pi}{3} + \varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right],$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{5\pi}{6}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore g(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right),$$

若函数 $g(x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，则 $y = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right)$ ，

$$\text{所以当 } x \in [0, 2\pi] \text{ 时， } 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} \right],$$

Q $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，

$$\therefore 5\pi, 4\pi\omega + \frac{\pi}{6} < 6\pi,$$

$$\therefore \frac{29}{24} < \omega < \frac{35}{24}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数图象的性质、三角函数的平移伸缩以及零点个数问题，考查转化思想和计算能力。

2、C

【解析】

根据题目中的基底定义求解。

【详解】

$$\text{因为 } 1 = -1 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$2 = 1 \times 2 + 0 \times 3,$$

$$3 = 0 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$4 = 1 \times 2 + 1 \times 2,$$

$$5 = 1 \times 2 + 1 \times 3,$$

$$6 = 1 \times 3 + 1 \times 3,$$

所以 $\{2, 3\}$ 能作为集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的基底,

故选: C

【点睛】

本题主要考查集合的新定义, 还考查了理解辨析的能力, 属于基础题.

3、B

【解析】

由题意得出 $\frac{b^2}{a^2}$ 的值, 进而利用离心率公式 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 可求得该双曲线的离心率.

【详解】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题意可得 $\frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$,

因此, 该双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{5}{3}$.

故选: B.

【点睛】

本题考查利用双曲线的渐近线方程求双曲线的离心率, 利用公式 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 计算较为方便, 考查计算能力, 属于基础题.

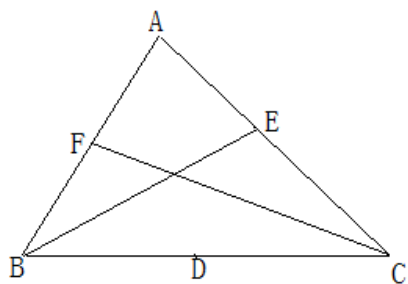
4、B

【解析】

根据题意, 画出几何图形, 根据向量加法的线性运算即可求解.

【详解】

根据题意, 可得几何关系如下图所示:



$$\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}), \overrightarrow{FC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

故选:B

【点睛】

本题考查了向量加法的线性运算,属于基础题.

5、B

【解析】

根据直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都相切,求得 a, b 的值,由此画出不等式组所表示的平面区域以及圆

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$, 由此求得正确选项.

【详解】

$f'(x) = \frac{2}{x}, g'(x) = 2x$. 设直线 $y = ax + b$ 与 $f(x)$ 相切于点 $A(x_0, 2\ln x_0 + 5)$, 斜率为 $\frac{2}{x_0}$, 所以切线方程为

$y - (2\ln x_0 + 5) = \frac{2}{x_0}(x - x_0)$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x + 2\ln x_0 + 3$ ①. 令 $g'(x) = 2x = \frac{2}{x_0}$, 解得 $x = \frac{1}{x_0}$, $g\left(\frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0^2} + 4$,

所以切线方程为 $y - \left(\frac{1}{x_0^2} + 4\right) = \frac{2}{x_0}\left(x - \frac{1}{x_0}\right)$, 化简得 $y = \frac{2}{x_0}x - \frac{1}{x_0^2} + 4$ ②. 由①②对比系数得 $2\ln x_0 + 3 = -\frac{1}{x_0^2} + 4$,

化简得 $2\ln x_0 + \frac{1}{x_0^2} - 1 = 0$ ③. 构造函数 $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2} - 1 (x > 0)$, $h'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$, 所以 $h(x)$

在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 所以 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值也即是最小值, 而 $h(1) = 0$, 所以 $h(x) = 0$ 有唯

一解. 也即方程③有唯一解 $x_0 = 1$. 所以切线方程为 $y = 2x + 3$. 即 $a = 2, b = 3$. 不等式组 $\begin{cases} x - ay + 3 \geq 0 \\ x + by - 2 \geq 0 \end{cases}$ 即

$\begin{cases} x - 2y + 3 \geq 0 \\ x + 3y - 2 \geq 0 \end{cases}$, 画出其对应的区域如下图所示. 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 可化为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 24$, 圆心为

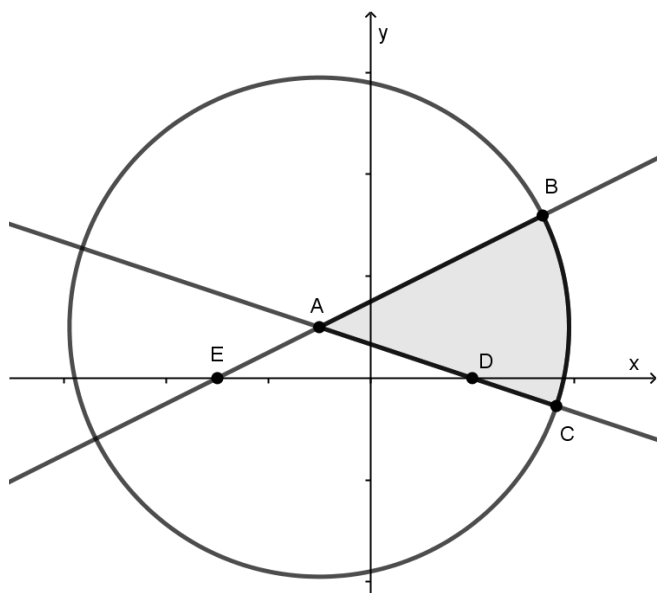
$A(-1,1)$.而方程组 $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+3y-2=0 \end{cases}$ 的解也是 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$.画出图像如下图所示,不等式组 $\begin{cases} x-2y+3 \geq 0 \\ x+3y-2 \geq 0 \end{cases}$ 所确定的平面区

域在 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 22 = 0$ 内的部分如下图阴影部分所示.直线 $x-2y+3=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 直线 $x+3y-2=0$ 的

斜率为 $-\frac{1}{3}$.所以 $\tan \angle BAC = \tan(\angle AED + \angle ADE) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$, 所以 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 而圆 A 的半径为

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 所以阴影部分的面积是 $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \times (2\sqrt{6})^2 = 3\pi$.

故选: B



【点睛】

本小题主要考查根据公共切线求参数, 考查不等式组表示区域的画法, 考查圆的方程, 考查两条直线夹角的计算, 考查扇形面积公式, 考查数形结合的数学思想方法, 考查分析思考与解决问题的能力, 属于难题.

6、B

【解析】

求导函数, 求出函数的极值, 利用函数 $f(x) = x^2 e^x - a$ 恰有三个零点, 即可求实数 a 的取值范围.

【详解】

函数 $y = x^2 e^x$ 的导数为 $y' = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(x+2)$,

令 $y' = 0$, 则 $x = 0$ 或 -2 ,

$-2 < x < 0$ 上单调递减, $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 0 或 -2 是函数 y 的极值点,

函数的极值为: $f(0)=0, f(-2)=4e^{-2}=\frac{4}{e^2}$,

函数 $f(x)=x^2e^x-a$ 恰有三个零点, 则实数的取值范围是: $(0, \frac{4}{e^2})$.

故选 B.

【点睛】

该题考查的是有关结合函数零点个数, 来确定参数的取值范围的问题, 在解题的过程中, 注意应用导数研究函数图象的走向, 利用数形结合思想, 转化为函数图象间交点个数的问題, 难度不大.

7、C

【解析】

设 $z=a+bi$, 则 $\bar{z}=a-bi$, 利用 $z-\bar{z}=0$ 和 $z\cdot\bar{z}=9$ 求得 a, b 即可.

【详解】

设 $z=a+bi$, 则 $\bar{z}=a-bi$,

因为 $z-\bar{z}=0$, 则 $(a+bi)-(a-bi)=2bi=0$, 所以 $b=0$,

又 $z\cdot\bar{z}=9$, 即 $a^2=9$, 所以 $a=\pm 3$,

所以 $z=\pm 3$,

故选:C

【点睛】

本题考查复数的乘法法则的应用, 考查共轭复数的应用.

8、D

【解析】

集合 $M=\{x|x^2=1\}=\{-1, 1\}$. N 为自然数集, 由此能求出结果.

【详解】

解: 集合 $M=\{x|x^2=1\}=\{-1, 1\}$. N 为自然数集,

在 A 中, $1\in M$, 正确;

在 B 中, $M=\{-1, 1\}$, 正确;

在 C 中, $\emptyset\subseteq M$, 正确;

在 D 中, M 不是 N 的子集, 故 D 错误.

故选: D.

【点睛】

本题考查命题真假的判断、元素与集合的关系、集合与集合的关系等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/555201333120011144>