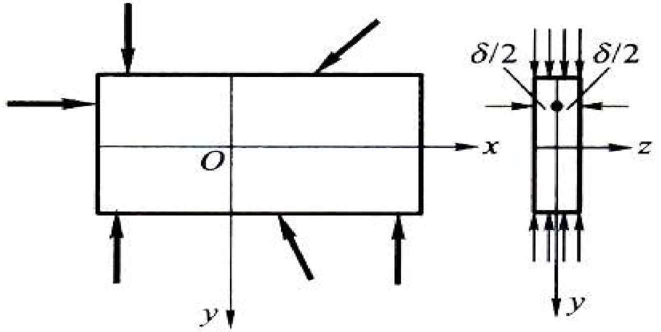
平面问题的基本理论(THEORY OF PLANE PROBLEMS)

§2.1 平面应力和平面应变问题(Plane Stress and Plane Strain)

2.1.1**平面应力(the plane stress problem)**. 设有很薄的等厚度薄板, 如图2.1所示. 只有板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力或约束, 则叫做平面应力.

假定薄板的厚度为δ. 以薄板的的中面为 xy面 ,以垂直于中面的任一直线为 z 轴. 因为板面上($z=\pm\frac{\delta}{2}$) 不受力, 所以有



$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0, \qquad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0, \qquad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}}=0.$$

图2.1

由于板很薄, 外力不沿厚度变化, 应力沿板的厚度又是连续分布, 因此, 可以认为薄板所有的点都有

$$\sigma_z=0, \qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}=0, \qquad \tau_{zy}=\tau_{yz}=0.$$

只有三个应力分量: σ_x, σ_y 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$

2.1.2 平面应变问题(plane strain problem)

设有很长的柱形体, 它的横截面不沿长度变化, 如图2.2所示.在柱面上受有平行于横截面并且不沿长度变化的面力或约束. 同时, 体力也平行于横截面并且不沿长度变化, 则这种情况叫平面应变.

(1) 以任一横截面为 *xy* 面, 任一纵线为z轴, 则所有一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿z方向变化, 而只是*x* and *y* 的函数.

(2) 由于对称性, 在z轴方向方不能任何位移和形变, 故有$w = 0$ and$\varepsilon z = 0$.

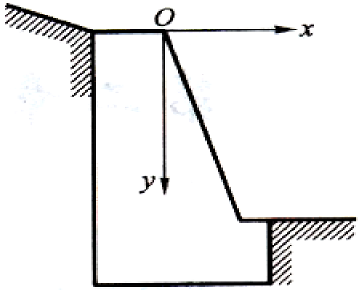


图2.2

(3) 由于对称性,应有

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0.$$

又有剪应力互等定理有

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0.$$

(4) 由于胡克定律,有 γ_{zx} γ_{zy}. 因此只有三个形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$.

但一般 $\sigma_z \neq 0, \sigma_x, \sigma_y$与$\tau_{xy} \neq 0$

§2.2 平衡微分方程(Differential Equations of Equilibrium)

从 Fig.2.1的板中 or Fig.2.2 柱形体中, 取出一个微小正平行六面体, 它在*x* direction 和*y* direction 的 dimensions 分别是 *dx* and *dy* (Fig 2.3). 为简便, the dimension in the z direction is 取单位长度.

一般地说, 应力分量是 *x* and *y*的函数, 因此作用在左右两面 or 上下两面的应力分量是不相同的. 例如, 设左边的 average normal stress component 是 σ_x , 则作用在the right face应力分量, 由于 *x* coordinate 的改变, 可以用Taylor’s 级数表示如下:

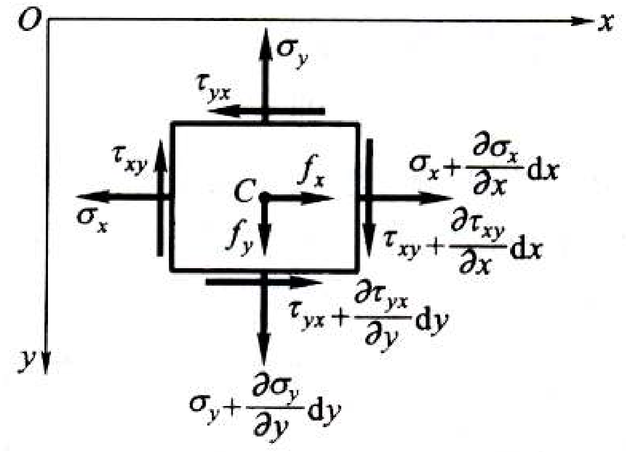


图 2.3

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}dx^2+\cdots\cdots$$

略去二阶以及二阶以上的微量, 得

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$$

同样, 若左边的 average shear stress 是 τ_{xy}, 则右边的 average shear stress 将为:

$$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$$

the average normal and shear stresses on the upper face being σ_y and τ_{xy}, those on the lower face will be

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \qquad \text{和} \qquad \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

通过中心点C 并垂直于 xy plane的直线为轴, 列出力矩的 equilibrium equation:

$$\sum M_o = 0$$

$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2} -$$

$$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0$$

两边除于$dxdy$, 并合并相同的项, 得

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy$$

略去微小量, 得

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{2.1}$$

这再一次证明了**reciprocal theorem of shear stress.**

其次, 以 x axis 为投影axis, 列出投影的equilibrium equation $\Sigma F_x = 0$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 +$$

$$\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx \times 1 - \tau_{yx}dx \times 1 + f_x dxdy \times 1 = 0$$

约简以后, 两边除以 $dxdy$, 得:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0$$

同样, 由 equilibrium equation $\Sigma F_y=0$可得到一个相似的differential equation. 于是, 就得到plane problem 中应力分量和体力分量的关系式, 即平面问题中differential equation of equilibrium :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

在这两个 equations中, 包含3个 unknown functions, 即 σ_x, σ_y and $\tau_{xy}=\tau_{yx}$. 因此, 确定应力分量的elasticity problem 是超静定的.要解出未知应力分量, 还要考虑the geometrical and physical conditions.

§ 2.3 The State of Stress at Point. Principal Stresses

2.3.1 一点的应力状态

设任一点 P 在坐标轴上的应力分量(stress components) σ_x, σ_y and τ_{xy}已知，见Fig.2.4(a), 试求经过该点, 平行于*z* axis ,而倾斜于*x* and *y* axes 的任意斜面上的应力. 为此, 我们取一个plane *AB* ,平行于上述斜面, 并与经过P点而垂直于*x* and *y* axes 的的两个平面划出一个微小的三角板或三棱柱PAB, 见图2.4(b).

用 *n* 代表plane *AB* 的外法线, 用*l* and *m* 表示法线*n* 和 the axes *x* and *y* 之间的角度的方向余弦,

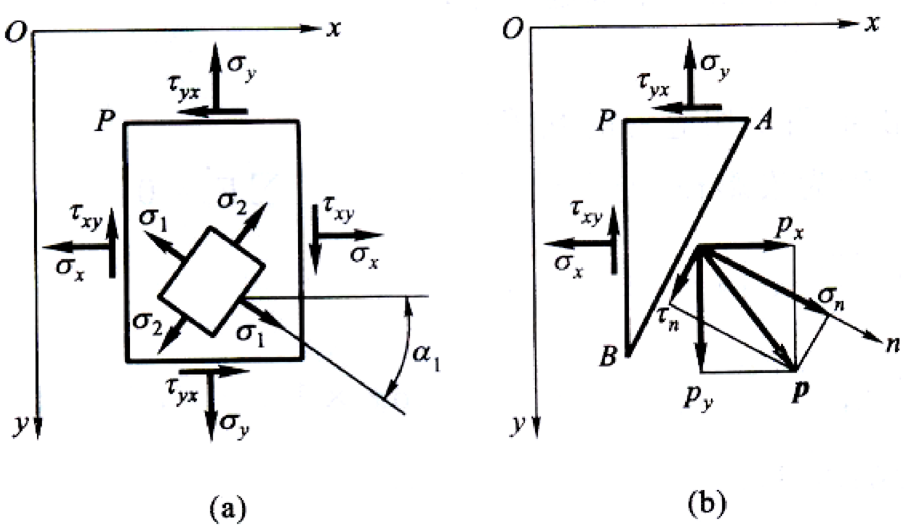


Fig.2.4

$$\cos(n,x)=l, \qquad \cos(n,y)=m$$

并用 p_x and p_y 代表斜面*AB* 上的全应力*p*在 the *x* and *y* 轴上的投影.

假设AB的 length 是 *ds*, 则the face *PB* and *PA* 的 lengths 分别是 *lds* and *mds*, 而*PAB*的面积 *是 ldsmds/2*. *z* direction 的尺寸还取单位1, 由 equilibrium conditionΣF_x =0 给出

$$p_x ds - \sigma_x lds - \tau_{xy} mds + f_x \frac{ldsmds}{2} = 0$$

这里f_x 是 body force 沿*x* direction 的 component. 上式除于 ds, 然后命 ds 趋向零, 即得

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}$$

同样可以由equilibrium condition ΣF_y =0, 得出一个相似的方程. 总共得两个方程:

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \qquad p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy} \tag{2.3}$$

命斜面*AB*上的 normal stress 是 σ_n , 则由 p_x and p_y 在法线 n 的投影得
:

$$\sigma_n = lp_x + mp_y$$

将式(2.3)代入,即得

$$\sigma_n = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy} \tag{2.4}$$

命斜面*AB*上的shear stress 为 τ_n.则由 p_x and p_y 在垂直法线 n 方向上的投影得:

$$\tau_n = lp_y - mp_x$$

将Eqs.(2.3)代入,即得

$$\tau_n = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy} \tag{2.5}$$

这样, 如果已知point *P* 的stress components σ_x, σ_y and τ_{xy} , 则从方程(2.4) and (2.5) 就可以求出经过P点的任一斜面上的 normal and shear stresses .

2.3.2 主应力(principal stress)

设通过P点的某一斜面上的 shear stress 等于零, 那这个面就叫做在*P*点的**应力主面(principal plane of stress),** 而这个面的 normal stress 被叫做在P点的**主应力(principal stress)**, 该斜面的法线方向称为在P点的**应力主向 (principal direction of stress).**

在应力主面, 由于shear stress 等于零, 全应力就等于该面上的正应力, 也就是principal stress σ, 即 σ =p. 这样, 它在 *x* and *y* axes 上的投影为

$$p_x = lp = l\sigma, \qquad p_y = mp = m\sigma$$

将(2.3)代入, 即得

$$l\sigma = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \qquad m\sigma = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

解出比值*m/l*, 得

$$\frac{m}{l} = \frac{\sigma - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \qquad \frac{m}{l} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y} \qquad \text{(a)}$$

于是得

$$(\sigma - \sigma_x)(\sigma - \sigma_y) = \tau_{xy}^2$$

于是可得的二次方程

$$\sigma^2-(\sigma_x+\sigma_y)\sigma+(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2)=0$$

我们知道二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的根为：

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{4a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

这里， $a=1, b=-(\sigma_x+\sigma_y), c=\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2$

将 σ 解出, 得两个根

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.6}$$

从 Eqs.(2.6), 我们可推出

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \tag{2. 7 }$$

设α_1 为σ_1 和 x axis 之间的夹角, 如 Fig.2.4a, 则

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\cos(90^0 - \alpha_1)}{\cos\alpha_1} = \frac{m_1}{l_1}$$

这里 l_1 and m_1 是are σ_1 的方向余弦. 利用公式 (a)中的第一式, 可得

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \tag{a}$$

设 α_2 为 σ_2和 x axis 之间的夹角, 则与上相类似, 有

$$\tan\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

利用 Eqs.(2.7), 我们得 $\sigma_2-\sigma_y=-(\sigma_1-\sigma_x)$, 则

$$\tan\alpha_2=-\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_x} \qquad (c)$$

利用 (b) and (c)式, 可得

$$\tan\alpha_1\tan\alpha_2=-1$$

这说明两个 principal stresses σ_1 and σ_2互 相垂直.

2.3.3 最大与最小应力(maximum and minimum stresses)

如果将 x and y axes 分别放在 σ_1 and σ_2的方向上, 则有

$$\tau_{xy}=0,\quad \sigma_x=\sigma_1,\quad \sigma_y=\sigma_2 \qquad (d)$$

根据 Eqs.(2.4) and (d), 有

$$\sigma_n=l^2\sigma_1+m^2\sigma_2$$

利用关系式$l^2+m^2=1$ 消去 m^2 , 得到

$$\sigma_n = l^2\sigma_1 + (1-l^2)\sigma_2 = l^2(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2$$

因为 l^2的最大值是 1,最小值是零, 所以 σ_n 的最大值是 σ_1,最小值是 σ_2. 这就是说,**两个主应力也就是最大与最小的正应力**.

按照Eqs.(2.5)and (d), 任一斜面上的切应力为

$$\tau_n = lm(\sigma_2 - \sigma_1)$$

利用关系式 $l^2 + m^2 = 1$消去m, 得

$$\tau_n = \pm l\sqrt{1-l^2}(\sigma_2 - \sigma_1) = \pm\sqrt{l^2 - l^4}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - l^2\right)^2}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

当 $\frac{1}{2} - l^2 = 0$ 时, 也就是 $l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, shear stress τ_n 为最大或最小, 而最大与最小的切应力为 $\pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$,发生在与$x$ and y axes (即应力主向) 成 45^0 角的斜面上.

§2 .4 几何方程 刚体位移 (Geometrical Equations. Rigid-Body Displacements)

2.4.1**几何方程:** 现在考虑几何学方的问题.

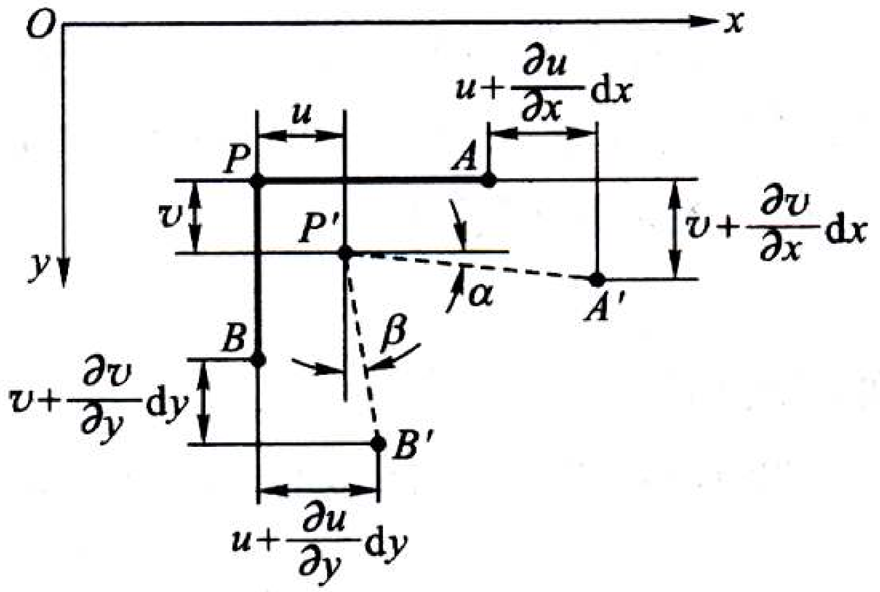
在elastic body 中的任一点 P , 沿坐标轴正方向取两个微小长度的线段 $PA=dx$ and $PB=dy$ (Fig.2.5). 物体变形后，点 P, A, B 移动到 P’, A’, B’.

设point P 在x axis 方向的位移是u, 则point A在x axis 方向的位移是

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

可见线段PA的线应变是

$$\varepsilon_x=\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)-u}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}$$



这里略去y方向的位移v所引起的PA的伸缩.

图2.5

同样, 线段PB 的线应变是

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{(b)}$$

在P点的shear strain γ_{xy} 是指线段PA and PB 之间直角的改变. 这个切应变由两部分组成: α and β , as shown in Fig.2.5. α 是x 方向的线段 PA 的转角. β 是y 方向的线段 PB 的转角.

假设 P point along y axis 位移是 v, 则 A along y axis is $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$

因此, 线段 PA 的转角是

$$\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样,线段 PB 的转角是 $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$

所以,可得

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{(c)}$$

综合(a), (b) and (c)三式, 我们就可以得到平面问题的三个 geometrical equations:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.8}$$

2.4.2 刚体运动

由几何方程可见, 当物体的位移分量完全确定时, 形变分量即完全确定. 但反之,当形变分量完全确定时,位移分量却不能完全确定.为了说明这一点, 设

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \tag{d}$$

则 Eqs.(2.8) 变为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{e}$$

将前两式分别对x及y积分, 得

$$u = f_1(y), \qquad v = f_2(x) \tag{f}$$

这里 f_1 and f_2 是任意函数. 代入 Eqs.(e)第三式,得

$$-\frac{df_1(y)}{dy}=\frac{df_2(x)}{dx}$$

左边只是 y 的函数, 而右边只是 x 的函数, 因此, 只有两边都等于同一常数, 如 w. 于是得

$$\frac{df_1(y)}{dy}=-w, \qquad \frac{df_2(x)}{dx}=w$$

积分得 $$u=u_0-wy, \qquad v=v_0+wx \tag{2.9}$$

Eqs.(2.9)中的位移, 是"形变为零"时的位移, 所以是**刚体位移**(**rigid-body displacements**). 事实上, u_0 and v_0 是沿x and y directions 的刚体平移; w是绕z axis的刚体转动.

既然物体在形变为零时有刚体位移, 有形变时, 也可能产生刚体位移.

2.5 物理方程(Physical Equations)

根据材料力学中的广义Hooke’s law , 有:

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}
$$

这就是Three Dimensional Physical Equations .这里 E 是弹性模量(modulus of elasticity)或杨氏模量(Young’s modulus), μ是泊桑比(Poisson’s ratio) and G 是剪切模量(shear modulus)or 刚度模量(modulus of rigidity). 它们有如下关系:

$$
G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{2.11}
$$

在**平面应力问题(plane stress problem)**中, 有 $\sigma_z = 0$. 将Eqs.1.10中的前两式删去σ_z , 并将Eq.2.11 代入 Eqs.2.10的第六式, 得

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

这就是平面应力问题的物理方程(the physical equations of a plane stress problem).

而Eqs.(2.10) 中的第三式变为:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{a}$$

ε_z 可由σ_x and σ_y 导出, 因此它不是独立变量. 又由$\tau_{yz}= 0$,$\tau_{zx}= 0$, 可得

$$\gamma_{yz} = 0, \qquad \gamma_{zx} = 0$$

由（2.12), 反过来可有 another form of physical equation of a plane stress problem:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{aligned}\right\}$$

在**平面应变问题(plane strain problem)**中, 因为物体所有的点都不能沿 *z* direction移动, 即$\varepsilon_z = 0$, 于是 Eqs.(2.10) 第三式变为

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

σ_z 同样不能看成独立未知函数. 将上式代入Eqs.(2.10)的前两式, 并结合第三式, 得

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\}$$

这就是plane strain problem 的 the physical equations. 另外, 由于 $\tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0$, 所以也有

$$\gamma_{yz} = 0, \qquad \gamma_{zx} = 0$$

由此可见, 这两个平面问题的 physical equations 是不一样的. 假如我们将plane stress problems 的physical equations (2.12) 中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$,将 μ换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 就得到plane strain problems 的 physical equations (2.13). 其中第三式也不例外,因为

$$\frac{2\left(1+\frac{\mu}{1-\mu}\right)}{\frac{E}{1-\mu^2}}=\frac{2(1+\mu)}{E}$$

若反过来求应力，有

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y\right)\\
\sigma_y &= \frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_y+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x\right)\\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}$$

2.6 边界条件(Boundary Conditions)

The boundary conditions表示位移与约束(displacements and constrains), 应力与面力(stresses and surface forces)之间的关系式. 它分为

(1) 位移边界条件(displacement boundary conditions)

In a displacement boundary problem, 物体部分s_u表面位移是给定的, 即有

$$(u)_s = \bar{u}(s), \qquad (v)_s = \bar{v}(s) \qquad (on\ s_u)$$

where $(u)_s$ and $(v)_s$ 是s_u surface上位移的边界值, $\bar{u}(s)$ *and* $\bar{v}(s)$ 是坐标的已知函数. 对于完全固定边界 $\bar{u}(s) = \bar{v}(s) = 0$ 有

$$(u)_s = 0, \qquad (v)_s = 0 \qquad (on\ s_u)$$

(2) 应力边界条件(stress boundary conditions)

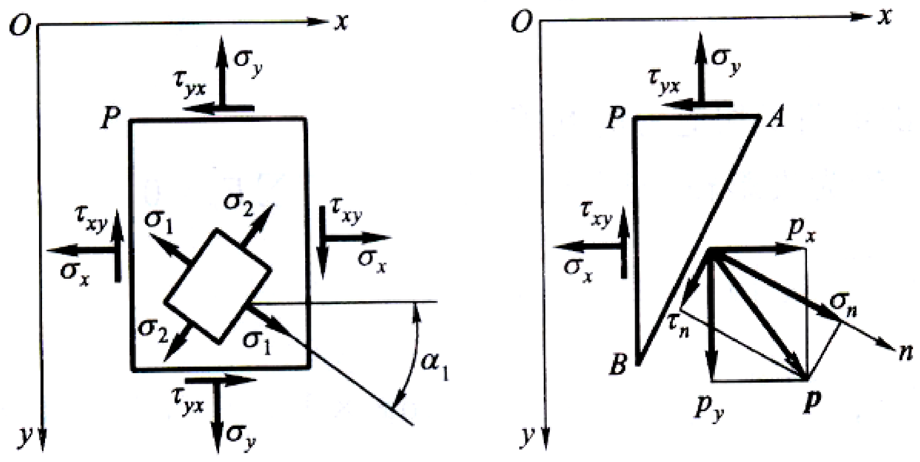
在下图(b) 中的AB表面取 point P . 这样 p_x and p_y 变成在P 点的 surface force components $\bar{f}_x$ *and* $\bar{f}_y$. 而σ_x,σ_y,τ_{xy},τ_{yx} 变成在P的 stress components 的boundary values, 则 Eqs.(2.3)

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \qquad p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

变成

$$\left.\begin{aligned}(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x(s)\\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y(s)\end{aligned}\right\} \qquad (\text{on } s_\sigma)$$

(2.15)



(a) (b)

这里 $\bar{f}_x$ *and* $\bar{f}_y$ 是边界坐标的已知函数. l and m 是边界法线的 the direction cosines . Eqs.(2.15) 就是 plane problem 的stress (or surface force) boundary conditions .

当边界与坐标轴垂直时, the stress boundary conditions 可以简化: 若边界垂直于 x axis，这时 $l=\pm 1, m=0$, 则 boundary conditions (2.15) 可简化为:

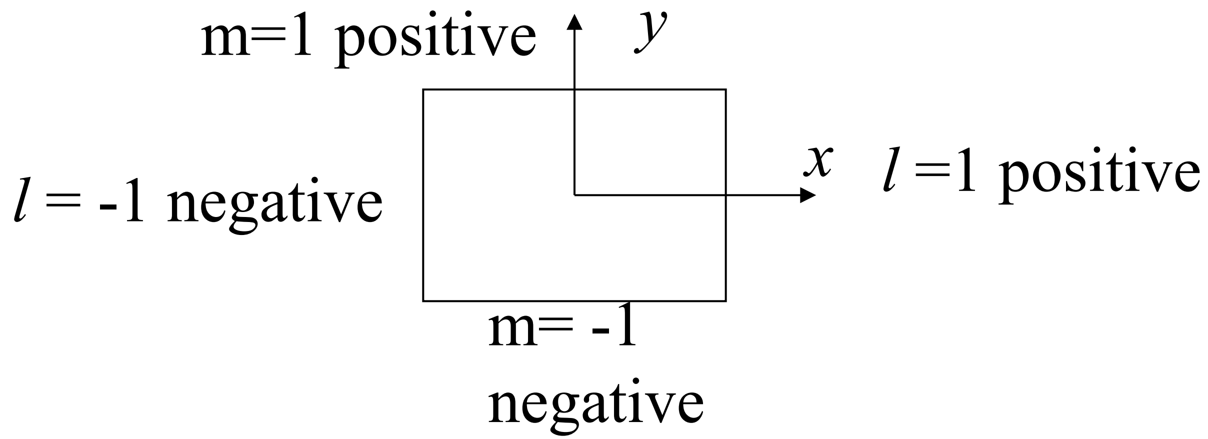
$$(\sigma_x)_s = \bar{f}_x(y), \quad (\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(y) \quad (when \quad l=1) \qquad (b)$$

$$(\sigma_x)_s = -\bar{f}_x(y), \quad (\tau_{xy})_s = -\bar{f}_y(y) \quad (when \quad l=-1) \qquad (c)$$

若边界垂直于 y axis，这时 $l=0, m=\pm 1$，the boundary conditions (2.15) 简化为:

$$(\sigma_y)_s = \bar{f}_y(x), \quad (\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(x) \quad (when \quad m=1) \qquad (d)$$

$$(\sigma_y)_s = -\bar{f}_y(x), \quad (\tau_{xy})_s = -\bar{f}_x(x) \quad (when \quad m=-1) \qquad (e)$$



(3) 混合边界条件(mixed boundary conditions)

若物体的一部分边界具有已知位移, 因而具有位移边界条件, 如式(2.14)所示; 另一部分具有已知表面力,因而具有应力边界条件,如式(2.15)所示, 则叫混合边界条件.

此外, 在同一部分边界上还可能出现混合边界条件, 即两个边界条件中, 一个是位移边界条件, 另一个是应力边界条件. 如图2.7(a), 在 x direction 有displacement boundary condition $(u)_s = \bar{u} = 0$, 在y direction 有 stress boundary condition $(\tau_{xy})_s = \bar{f}_y = 0$. 在 Fig. 2.7b, 我们有 stress boundary condition

$$(\sigma_x)_s = \bar{f}_x = 0$$

而在 y 方向, 有displacement boundary condition

$$(v)_s = \bar{v} = 0$$

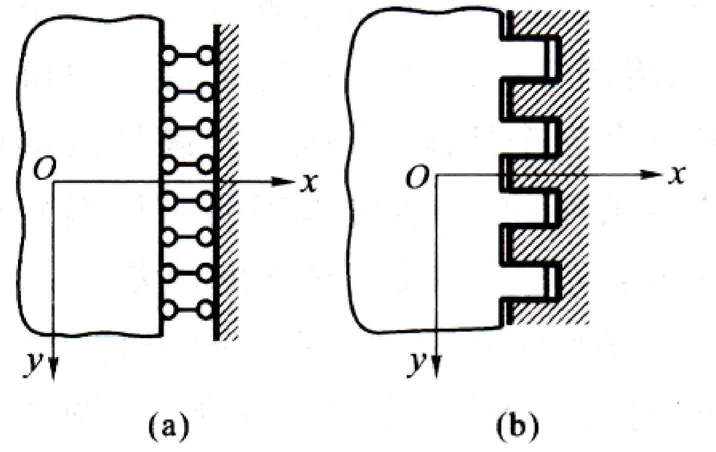


Fig. 2.7

2.7 圣维南原理及其应用(Saint-Venant’s Principle and its Application)

如果应力边界条件比较复杂, 往往求解时不能满足, 这时就要对应力边界条件进行简化. 利用圣维南原理可为应力边界条件的简化提供方便.

2.7.1 圣维南原理：如果把物体的一小部分边界上的surface forces, 变换为分布不同但静力等效(statically equivalent)的面力 (合力相同(the same resultant force) , and 对于同一点的主矩也相同(the same resultant moment about the same point)), 那末, 近处的应力分布将有显著的改变, 但是远处的影响可以不计. 如下图, (a) 是原来受力的情况, (b)、 (c)、 (d)和 (e) 都是(a) 的静力等效力系，这样，在这四种情况下，只有靠近两端的应力有显著改变，离开两端较远处的应力分布，并没有显著差别。