

2023-2024 学年广东省中山一中等六校中学高考压轴数学试题试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂; 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知实数 $a = 3^{\ln 3}$, $b = 3 + 3 \ln 3$, $c = (\ln 3)^3$, 则 a, b, c 的大小关系是()

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $a < c < b$

2. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$, 若 c 为最大边, 则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是()

- A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $(1, \sqrt{3}]$

3. 已知直四棱柱 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 的所有棱长相等, $\angle ABC = 60^\circ$, 则直线 BC_1 与平面 $ACC_1 A_1$ 所成角的正切值等于()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

4. 若不等式 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 对于一切 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ 恒成立, 则 a 的最小值是 ()

- A. 0 B. -2 C. $-\frac{5}{2}$ D. -3

5. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi) - 1$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$) 的一个零点是 $\frac{\pi}{3}$, 函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = -\frac{\pi}{6}$, 则当 ω 取得最小值时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 ()

- A. $\left[3k\pi - \frac{\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) B. $\left[3k\pi - \frac{5\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- C. $\left[2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$) D. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

6. 如图所示, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某多面体的三视图, 则该几何体的各个面中最大面的面积为 ()



- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 8 D. $8\sqrt{3}$

7. 若点 (x, y) 位于由曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $x = 3$ 围成的封闭区域内 (包括边界), 则 $\frac{y+1}{x-2}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $[-3, 5]$ C. $(-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

8. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则点 $P(x, y)$ 所在区域的面积是 ()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

9. 已知复数 z 满足 $z \cdot i = z + i$, 则 $\bar{z}$ 在复平面上对应的点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. 已知点 F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 的右焦点, 直线 $y = kx$ 与双曲线交于 A, B 两点, 若 $\angle AF_2B = \frac{2\pi}{3}$, 则

$\triangle AF_2B$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}$

11. 若 $(1 - 2i)z = 5i$ (i 是虚数单位), 则 $|z|$ 的值为 ()

- A. 3 B. 5 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

12. 设 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的取值范围是 ()

- A. $[-5, 3]$ B. $[2, 3]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, 3]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若函数 $f(x) = e^x - ax > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 若向量 $\vec{a} = (x - 1, 2)$ 与向量 $\vec{b} = (2, 1)$ 垂直, 则 $x =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 若方程 $f(x) = \frac{3}{5}$ 的解为 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2 < \pi$), 则 $x_1 + x_2 =$ _____;

$\sin(x_1 - x_2) =$ _____.

16. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = AC$, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 且三棱柱的侧面积为 $3\sqrt{3}$. 若该三棱柱的顶点都在同一个球 O 的表面上, 则球 O 的表面积的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 设函数 $f(x) = me^x - x^2 + 3$, 其中 $m \in R$.

(I) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 求函数 $h(x) = xf(x)$ 的极值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上有两个零点, 求 m 的取值范围.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + \ln x$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + (a-1)\ln x$ 的图象与 x 轴有且只有一个公共点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x) - (2m-1)x < (1-m)x^2$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (12 分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 $F(\sqrt{2}, 0)$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的弦长为 $3\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(2, 0)$ 且斜率不为 0 的直线与椭圆 C 交于 M, N 两点. O 为坐标原点, A 为椭圆 C 的右顶点, 求四边形 $OMAN$ 面积的最大值.

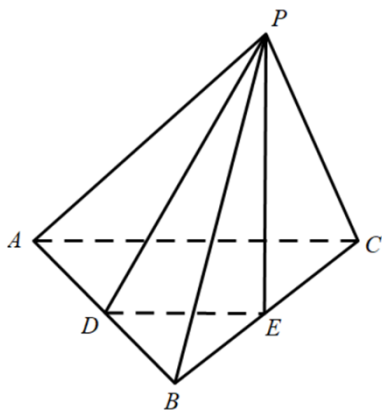
20. (12 分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 过点 $C(-2, 0)$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 坐标原点为 O ,

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 12$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 当以 AB 为直径的圆与 y 轴相切时, 求直线 l 的方程.

21. (12 分) 如图, 三棱锥 $P - ABC$ 中, 点 D, E 分别为 AB, BC 的中点, 且平面 $PDE \perp$ 平面 ABC .



(1) 求证: $AC \parallel$ 平面 PDE ;

(2) 若 $PD = AC = 2$, $PE = \sqrt{3}$, 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 ABC .

22. (10 分) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. (e 为自然对数的底数)

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过点 $(-e, -1)$, 求 x_0 的值;

(2) 若不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}ax^2 - (1-a)x - 1$ 恒成立, 求正整数 a 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据 $1 < \ln 3 < \frac{4}{3}$, 利用指数函数对数函数的单调性即可得出.

【详解】

解: $\because 1 < \ln 3 < \frac{4}{3}$,

$\therefore b = 3 + 3\ln 3 > 6$, $3 < a < 3^{\frac{4}{3}} < 6$, $c < \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} < 3$.

$\therefore c < a < b$.

故选: B.

【点睛】

本题考查了指数函数对数函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

2、C

【解析】

由 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$ ，化简得到 $\cos C$ 的值，根据余弦定理和基本不等式，即可求解.

【详解】

由 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$ ，可得 $\frac{(a^2 + b^2)^2 + c^4 - a^2b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$ ，

可得 $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2) + a^2b^2}{a^2 + b^2}$ ，

通分得 $\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2 - b^2) + a^2b^2}{a^2 + b^2} = 0$ ，

整理得 $(a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^2b^2$ ，所以 $(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})^2 = \frac{1}{4}$ ，

因为 C 为三角形的最大角，所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$ ，

又由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab$

$\geq (a + b)^2 - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{3}{4}(a + b)^2$ ，当且仅当 $a = b$ 时，等号成立，

所以 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b)$ ，即 $\frac{a+b}{c} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

又由 $a + b > c$ ，所以 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了代数式的化简，余弦定理，以及基本不等式的综合应用，试题难度较大，属于中档试题，着重考查了推理与运算能力.

3、D

【解析】

以 A 为坐标原点， AE 所在直线为 x 轴， AD 所在直线为 y 轴， AA_1 所在直线为 z 轴，

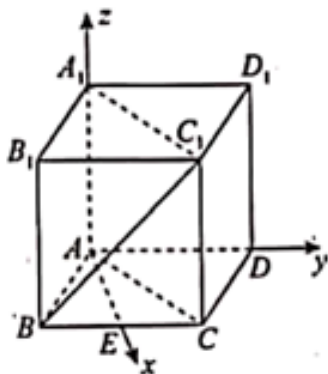
建立空间直角坐标系. 求解平面 ACC_1A_1 的法向量，利用线面角的向量公式即得解.

【详解】

如图所示的直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，取 BC 中点 E ，

以 A 为坐标原点， AE 所在直线为 x 轴， AD 所在直线为 y 轴， AA_1 所在直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系．



设 $AB = 2$ ，则 $A(0,0,0), A_1(0,0,2), B(\sqrt{3},-1,0), C(\sqrt{3},1,0), C_1(\sqrt{3},1,2)$ ，

$\overrightarrow{BC_1} = (0,2,2), \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{AA_1} = (0,0,2)$ ．

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 2z = 0, \end{cases} \text{取 } x = 1,$$

得 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 0)$ ．

设直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BC_1} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$\therefore$ 直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正切值等于 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

故选：D

【点睛】

本题考查了向量法求解线面角，考查了学生空间想象，逻辑推理，数学运算的能力，属于中档题．

4、C

【解析】

试题分析：将参数 a 与变量 x 分离，将不等式恒成立问题转化为求函数最值问题，即可得到结论.

解：不等式 $x^2+ax+1 \geq 0$ 对一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 成立，等价于 $a \geq -x - \frac{1}{x}$ 对于一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 成立，

$\therefore y = -x - \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上是增函数

$$\therefore -x - \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore a \geq -\frac{5}{2}$$

$\therefore a$ 的最小值为 $-\frac{5}{2}$ 故答案为 C.

考点：不等式的应用

点评：本题综合考查了不等式的应用、不等式的解法等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想，属于中档题

5、B

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的一个零点是 $x = \frac{\pi}{3}$ ，得出 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ ，再根据 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是对称轴，得出

$-\frac{\pi}{6}\omega - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ，求出 ω 的最小值与对应的 φ ，写出 $f(x)$ 即可求出其单调增区间.

【详解】

依题意得， $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi\omega}{3} + \varphi\right) - 1 = 0$ ，即 $\sin\left(\frac{\pi\omega}{3} + \varphi\right) = \frac{1}{2}$ ，

解得 $\frac{\pi\omega}{3} + \varphi = 2k_1\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi\omega}{3} + \varphi = 2k_2\pi + \frac{5\pi}{6}$ (其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$) .①

又 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi\right) = \pm 1$ ，

即 $-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi = k_3\pi + \frac{\pi}{2}$ (其中 $k_3 \in \mathbb{Z}$) .②

由①-②得 $\frac{\pi\omega}{2} = (2k_1 - k_3)\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi\omega}{2} = (2k_2 - k_3)\pi + \frac{\pi}{3}$ ，

即 $\omega = 2(2k_1 - k_3) - \frac{2}{3}$ 或 $\omega = 2(2k_2 - k_3) + \frac{2}{3}$ (其中 $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$)，因此 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

因为 $\sin\left(-\frac{\pi\omega}{6} + \varphi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{9} + \varphi\right) = \pm 1$, 所以 $-\frac{\pi}{9} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) - 1 = 2\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{9}\right) - 1$,

令 $2k\pi - \pi \leq \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{9} \leq 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, 则 $3k\pi - \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 3k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbf{Z})$.

因此, 当 ω 取得最小值时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[3k\pi - \frac{5\pi}{3}, 3k\pi - \frac{\pi}{6}\right] \quad (k \in \mathbf{Z})$.

故选: B

【点睛】

此题考查三角函数的对称轴和对称点, 在对称轴处取得最值, 对称点处函数值为零, 属于较易题目.

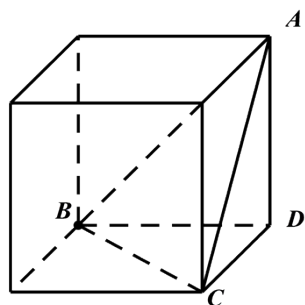
6、B

【解析】

根据三视图可以得到原几何体为三棱锥, 且是有三条棱互相垂直的三棱锥, 根据几何体的各面面积可得最大面的面积.

【详解】

解: 分析题意可知, 如下图所示,



该几何体为一个正方体中的三棱锥 $A-BCD$,

最大面的表面边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形 ABC ,

故其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$,

故选 B.

【点睛】

本题考查了几何体的三视图问题, 解题的关键是要能由三视图解析出原几何体, 从而解决问题.

7、D

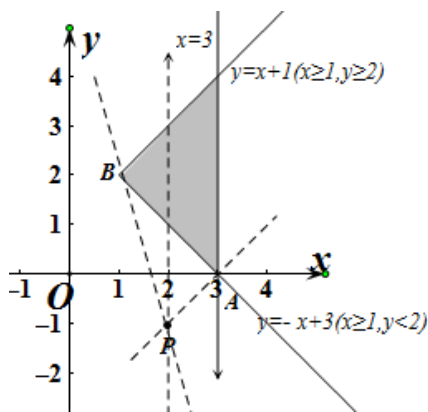
【解析】

画出曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $x = 3$ 围成的封闭区域， $\frac{y+1}{x-2}$ 表示封闭区域内的点 (x, y) 和定点 $(2, -1)$ 连线的斜率，然后结合

图形求解可得所求范围．

【详解】

画出曲线 $y = |x - 2| + 1$ 与 $x = 3$ 围成的封闭区域，如图阴影部分所示．



$\frac{y+1}{x-2}$ 表示封闭区域内的点 (x, y) 和定点 $(2, -1)$ 连线的斜率，

设 $k = \frac{y+1}{x-2}$ ，结合图形可得 $k \geq 1$ 或 $k \leq -3$ ，

由题意得点 A, B 的坐标分别为 $(3, 0)$, $(1, 2)$ ，

$$\therefore k_{AB} = \frac{1}{3-2} = 1, k_{AC} = \frac{2-(-1)}{1-2} = -3,$$

$$\therefore k \geq 1 \text{ 或 } k \leq -3,$$

$$\therefore \frac{y+1}{x-2} \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

故选 D.

【点睛】

解答本题的关键有两个：一是根据数形结合的方法求解问题，即把 $\frac{y+1}{x-2}$ 看作两点间连线的斜率；二是要正确画出两曲线

所围成的封闭区域．考查转化能力和属性结合的能力，属于基础题．

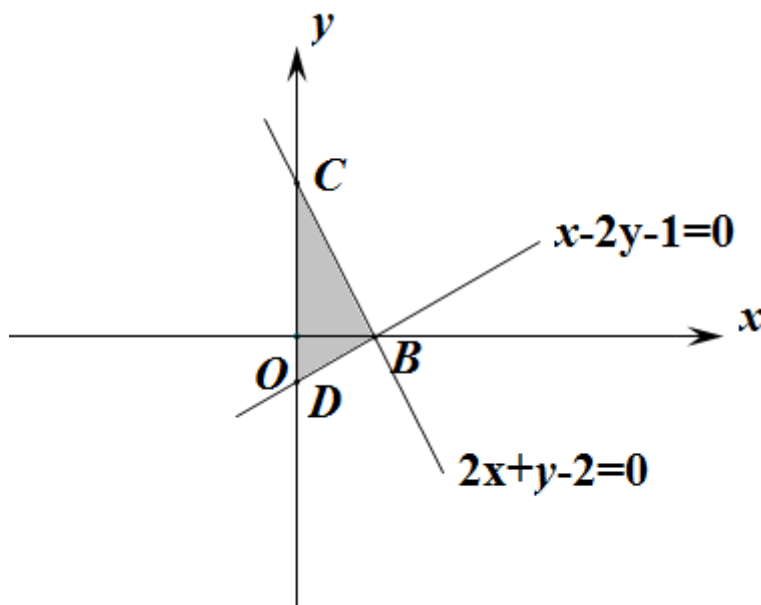
8、C

【解析】

画出不等式表示的平面区域，计算面积即可.

【详解】

不等式表示的平面区域如图：



直线 $2x + y - 2 = 0$ 的斜率为 -2 ，直线 $x - 2y - 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，所以两直线垂直，故 $\triangle BCD$ 为直角三角形，易得

$$B(1, 0), D(0, -\frac{1}{2}), C(0, 2), |BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}, |BC| = \sqrt{5} \text{ 所以阴影部分面积 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} |BD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式组表示的平面区域面积的求法，考查数形结合思想和运算能力，属于常考题.

9、A

【解析】

设 $z = a + bi (a, b \in R)$ ，由 $z \cdot i = z + i$ 得： $(a + bi)i = a + (b + 1)i$ ，由复数相等可得 a, b 的值，进而求出 $\bar{z}$ ，即可得解.

【详解】

设 $z = a + bi (a, b \in R)$ ，由 $z \cdot i = z + i$ 得： $(a + bi)i = a + (b + 1)i$ ，即 $ai - b = a + (b + 1)i$ ，

由复数相等可得： $\begin{cases} -b = a \\ a = b + 1 \end{cases}$ ，解之得： $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ，则 $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ，所以 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ，在复平面对应的点的坐标为

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，在第一象限.

故选：A.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/556112234040010232>