

新疆石河子高级中学 2024 届数学高三第一学期期末学业水平测试试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{12}$ ，将函数 $f(x)$ 的图象向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

后得到函数 $g(x)$ 图象，则函数 $g(x)$ 的解析式为（ ）

- A. $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{12})$ B. $g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{12})$
 C. $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ D. $g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$

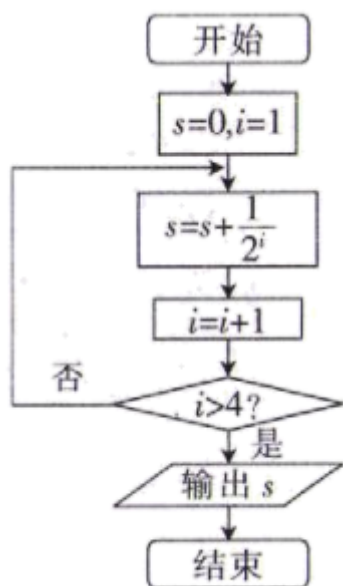
2. 一场考试需要 2 小时，在这场考试中钟表的时针转过的弧度数为（ ）

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $-\frac{2\pi}{3}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$ ，则方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是（ ）

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

4. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为（ ）



- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{15}{8}$ C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{16}$

5. 已知边长为 4 的菱形 $ABCD$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， M 为 CD 的中点， N 为平面 $ABCD$ 内一点，若 $AN = NM$ ，则

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\quad)$

- A. 16 B. 14 C. 12 D. 8

6. 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 k ，使直线 $y = k(x+3)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_{13} = 0$ ， $a_3 + a_4 = 21$ ，则 S_7 的值为 ()。

- A. 21 B. 63 C. 13 D. 84

8. 在菱形 $ABCD$ 中， $AC = 4$ ， $BD = 2$ ， E ， F 分别为 AB ， BC 的中点，则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = (\quad)$

- A. $-\frac{13}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. 5 D. $\frac{15}{4}$

9. 复数 $z = \frac{2+i}{1-i}$ ， i 是虚数单位，则下列结论正确的是

- A. $|z| = \sqrt{5}$ B. z 的共轭复数为 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
C. z 的实部与虚部之和为 1 D. z 在复平面内的对应点位于第一象限

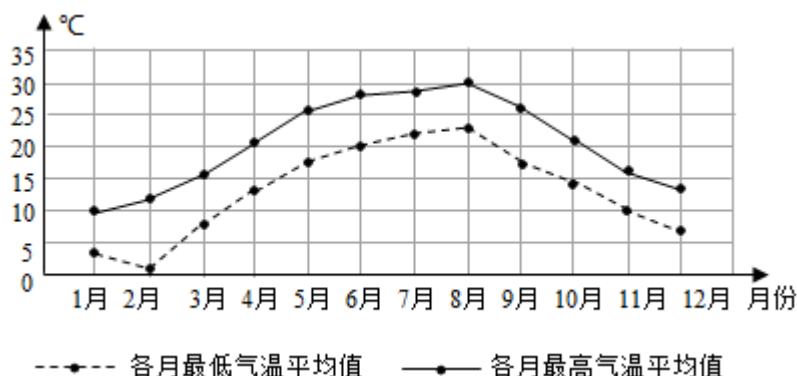
10. 已知命题 p ： $\exists x \in R$ ，使 $\sin x < \frac{1}{2}x$ 成立。则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \in R$ ， $\sin x \geq \frac{1}{2}x$ 均成立 B. $\forall x \in R$ ， $\sin x < \frac{1}{2}x$ 均成立
C. $\exists x \in R$ ，使 $\sin x \geq \frac{1}{2}x$ 成立 D. $\exists x \in R$ ，使 $\sin x = \frac{1}{2}x$ 成立

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a} + y^2 = 1$ 的一条渐近线倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ ，则 $a = (\quad)$

- A. 3 B. $-\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. -3

12. 某市气象部门根据 2018 年各月的每天最高气温平均数据,绘制如下折线图,那么,下列叙述错误的是()



- A. 各月最高气温平均值与最低气温平均值总体呈正相关
- B. 全年中,2月份的最高气温平均值与最低气温平均值的差值最大
- C. 全年中各月最低气温平均值不高于 10°C 的月份有 5 个
- D. 从 2018 年 7 月至 12 月该市每天最高气温平均值与最低气温平均值呈下降趋势

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $(x-2)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64，则展开式各项系数和为_____.

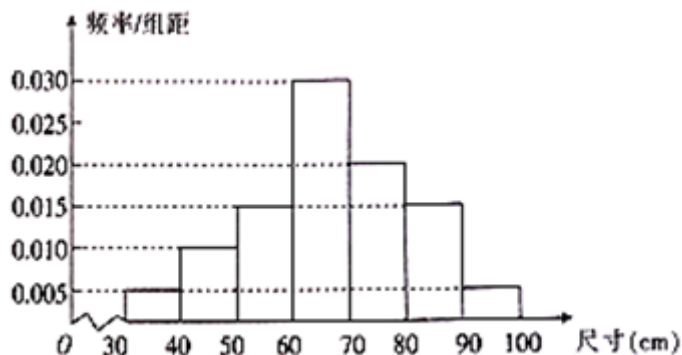
14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，三条侧棱 PA 、 PB 、 PC 两两垂直， $PB=PA+1$, $PA+PC=4$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为_____.

15. 已知函数 $f(x)=e^x(x+1)^2$ ，令 $f_1(x)=f'(x)$ ， $f_{n+1}(x)=f'_n(x)$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，若 $f_n(x)=e^x(a_n x^2+b_n x+c_n)$ ， $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数，记数列 $\left\{\frac{2a_n}{2c_n-b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $[3S_{2000}] =$ _____

16. 已知单位向量 a, b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $|a-2b| =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 为了检测某种零件的一条生产线的生产过程，从生产线上随机抽取一批零件，根据其尺寸的数据得到如图所示的频率分布直方图，若尺寸落在区间 $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ 之外，则认为该零件属“不合格”的零件，其中 $\bar{x}, s$ 分别为样本平均数和样本标准差，计算可得 $s \approx 15$ (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)。



- (1) 求样本平均数的大小；
- (2) 若一个零件的尺寸是 100 cm ，试判断该零件是否属于“不合格”的零件。
18. (12 分) 某企业生产一种产品，从流水线上随机抽取 100 件产品，统计其质量指标值并绘制频率分布直方图 (如图 1): 规定产品的质量指标值在 $[65, 85)$ 的为劣质品，在 $[85, 105)$ 的为优等品，在 $[105, 115]$ 的为特优品，销售时劣质品每件亏损 0.8 元，优等品每件盈利 4 元，特优品每件盈利 6 元，以这 100 件产品的质量指标值位于各区间的频率代替产品的质量指标值位于该区间的概率。

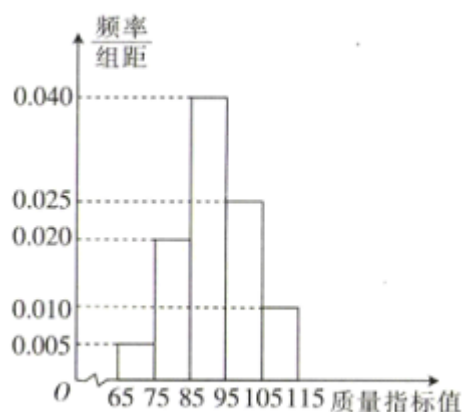


图 1

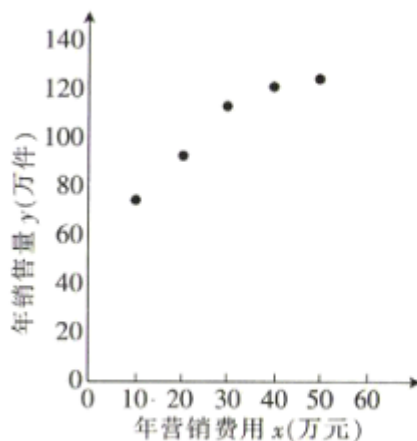


图 2

(1) 求每件产品的平均销售利润；

(2) 该企业主管部门为了解企业年营销费用 x (单位：万元) 对年销售量 y (单位：万件) 的影响，对该企业近 5 年的年营销费用 x_i 和年销售量 y_i ， $(i=1,2,3,4,5)$ 数据做了初步处理，得到的散点图 (如图 2) 及一些统计量的值。

$\sum_{i=1}^5 u_i$	$\sum_{i=1}^5 v_i$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2$
16.35	23.4	0.54	1.62

表中 $u_i = \ln x_i$ ， $v_i = \ln y_i$ ， $\bar{u} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 u_i$ ， $\bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$ 。

根据散点图判断， $y = ax^b$ 可以作为年销售量 y (万件) 关于年营销费用 x (万元) 的回归方程。

①求 y 关于 x 的回归方程；

②用所求的回归方程估计该企业每年应投入多少营销费，才能使得该企业的年收益的预报值达到最大？(收益 = 销售利润 - 营销费用，取 $e^{3.59} = 36$)

附：对于一组数据 (u_1, v_1) ， (u_2, v_2) ， $\dots$ ， (u_n, v_n) ，其回归直线 $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

19. (12 分) 已知动圆 E 与圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 外切，并与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 相切，记动圆圆心 E 的轨迹为曲线 C 。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 过点 $Q(-2, 0)$ 的直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, 若曲线 C 上存在点 P 使得 $\angle APB = 90^\circ$, 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

20. (12 分) [选修 4-4: 极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 与曲线 C_1 交于 O, A 两点, 与曲线 C_2 交于 O, B 两点, 求 $|OA| + |OB|$ 取最大值时 $\tan \beta$ 的值

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 4t - 4 \end{cases}$ (t 为参数), 以原点 O 为极点, x 轴正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 10 \cos \theta$.

(I) 设直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求 $|MN|$;

(II) 若点 $P(x, y)$ 为曲线 C 上任意一点, 求 $|x + \sqrt{3}y - 10|$ 的取值范围.

22. (10 分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立

极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{5}$.

(1) 求直线 l 的直角坐标方程;

(2) 若点 P 在曲线 C 上, 点 Q 在直线 l 上, 求 $|PQ|$ 的最小值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据辅助角公式化简三角函数式，结合 $x = \frac{\pi}{12}$ 为函数 $f(x)$ 的一条对称轴可求得 a ，代入辅助角公式得 $f(x)$ 的解析式.

根据三角函数图像平移变换，即可求得函数 $g(x)$ 的解析式.

【详解】

函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$,

由辅助角公式化简可得 $f(x) = \sqrt{1+a^2} \sin(2x+\theta)$, $\tan \theta = a$,

因为 $x = \frac{\pi}{12}$ 为函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$ 图象的一条对称轴,

代入可得 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) + a \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \pm \sqrt{1+a^2}$,

即 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \pm \sqrt{1+a^2}$, 化简可解得 $(a-\sqrt{3})^2 = 0$,

即 $a = \sqrt{3}$,

所以 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$

$= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

将函数 $f(x)$ 的图象向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得 $g(x)$,

则 $g(x) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

故选: C.

【点睛】

本题考查了辅助角化简三角函数式的应用, 三角函数对称轴的应用, 三角函数图像平移变换的应用, 属于中档题.

2、 B

【解析】

因为时针经过 2 小时相当于转了一圈的 $\frac{1}{6}$, 且按顺时针转所形成的角为负角, 综合以上即可得到本题答案.

【详解】

因为时针旋转一周为 12 小时, 转过的角度为 2π , 按顺时针转所形成的角为负角, 所以经过 2 小时, 时针所转过的弧度数为 $-\frac{1}{6} \times 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查正负角的定义以及弧度制，属于基础题.

3、D

【解析】

画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$,将方程 $f[f(x)] = 3$ 看作 $t = f(x), f(t) = 3$ 交点个数，运用图象判断根的个数.

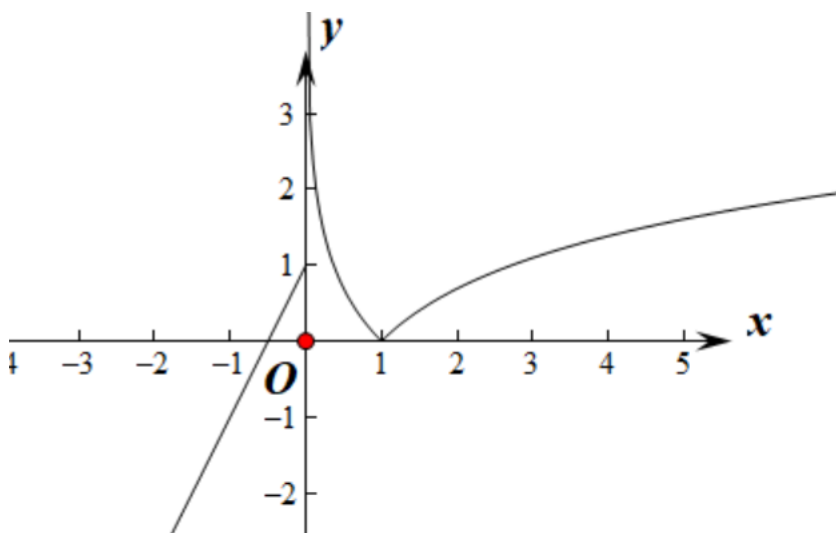
【详解】

画出函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$

令 $t = f(x)$, $\therefore f(t) = 3$ 有两解 $t_1 \in (0, 1), t_2 \in (1, +\infty)$, 则 $t_1 = f(x), f(x) = t_2$ 分别有 3 个, 2 个解, 故方程

$f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 $3+2=5$ 个

故选：D



【点睛】

本题综合考查了函数的图象的运用，分类思想的运用，数学结合的思想判断方程的根，难度较大，属于中档题.

4、D

【解析】

由程序框图确定程序功能后可得出结论.

【详解】

执行该程序可得 $S = 0 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查程序框图．解题可模拟程序运行，观察变量值的变化，然后可得结论，也可以由程序框图确定程序功能，然后求解．

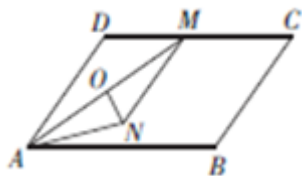
5、B

【解析】

取 AM 中点 O ，可确定 $\vec{AM} \cdot \vec{ON} = 0$ ；根据平面向量线性运算和数量积的运算法则可求得 $|\vec{AM}|^2$ ，利用 $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = \vec{AM} \cdot (\vec{AO} + \vec{ON})$ 可求得结果．

【详解】

取 AM 中点 O ，连接 ON ，



∵ $AN = NM$ ，∴ $ON \perp AM$ ，即 $\vec{AM} \cdot \vec{ON} = 0$ ．

∵ $\angle DAB = 60^\circ$ ，∴ $\angle ADM = 120^\circ$ ，

$$\therefore |\vec{AM}|^2 = (\vec{DM} - \vec{DA})^2 = |\vec{DM}|^2 + |\vec{DA}|^2 - 2|\vec{DM}| \cdot |\vec{DA}| \cos \angle ADM = 4 + 16 + 8 = 28，$$

$$\text{则 } \vec{AM} \cdot \vec{AN} = \vec{AM} \cdot (\vec{AO} + \vec{ON}) = \vec{AM} \cdot \vec{AO} + \vec{AM} \cdot \vec{ON} = \frac{1}{2} |\vec{AM}|^2 = 14．$$

故选：B．

【点睛】

本题考查平面向量数量积的求解问题，涉及到平面向量的线性运算，关键是能够将所求向量进行拆解，进而利用平面向量数量积的运算性质进行求解．

6、C

【解析】

根据直线与圆相交，可求出 k 的取值范围，根据几何概型可求出相交的概率．

【详解】

因为圆心 $(0, 0)$ ，半径 $r = 1$ ，直线与圆相交，所以

$$d = \frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}} \leq 1，\text{解得 } -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq k \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

所以相交的概率 $P = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 故选 C.

【点睛】

本题主要考查了直线与圆的位置关系，几何概型，属于中档题.

7、B

【解析】

由已知结合等差数列的通项公式及求和公式可求 d ， a_1 ，然后结合等差数列的求和公式即可求解.

【详解】

解：因为 $S_{13} = 0$ ， $a_3 + a_4 = 21$ ，

所以 $\begin{cases} 13a_1 + 13 \times 6d = 0 \\ 2a_1 + 5d = 21 \end{cases}$ ，解可得， $d = -3$ ， $a_1 = 18$ ，

则 $S_7 = 7 \times 18 + \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times (-3) = 63$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础题.

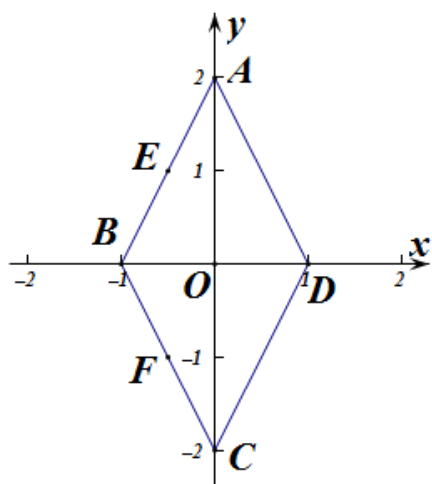
8、B

【解析】

据题意以菱形对角线交点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，用坐标表示出 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ ，再根据坐标形式下向量的数量积运算计算出结果.

【详解】

设 AC 与 BD 交于点 O ，以 O 为原点， $\overrightarrow{BD}$ 的方向为 x 轴， $\overrightarrow{CA}$ 的方向为 y 轴，建立直角坐标系，



则 $E\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $F\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $D(1, 0)$, $\overrightarrow{DE} = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $\overrightarrow{DF} = \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$,

所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查建立平面直角坐标系解决向量的数量积问题，难度一般.长方形、正方形、菱形中的向量数量积问题，如果直接计算较麻烦可考虑用建系的方法求解.

9、D

【解析】

利用复数的四则运算，求得 $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，在根据复数的模，复数与共轭复数的概念等即可得到结论.

【详解】

由题意 $z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+3i}{1-i^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$,

则 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, z 的共轭复数为 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$,

复数 z 的实部与虚部之和为 2, z 在复平面内对应点位于第一象限，故选 D.

【点睛】

复数代数形式的加减乘除运算的法则是进行复数运算的理论依据,加减运算类似于多项式的合并同类项,乘法法则类似于多项式乘法法则，除法运算则先将除式写成分式的形式,再将分母实数化，其次要熟悉复数相关基本概念，如复数 $a+bi(a, b \in \mathbb{R})$ 的实部为 a 、虚部为 b 、模为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 、对应点为 (a, b) 、共轭为 $a-bi$.

10、A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/557112011010006056>