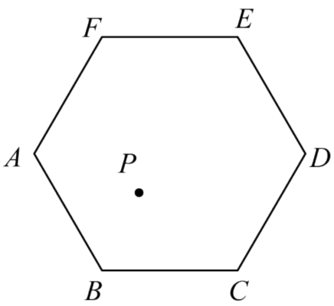
第 24 章圆（3）——重难点

内容范围：24.3~24.4

建议用时：40 分钟

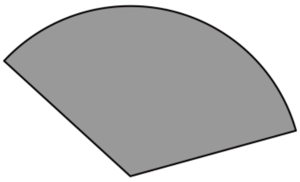
专项训练

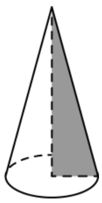
1．如图，点 P 是正六边形 $ABCDEF$ 内部一个动点，$AB=3\text{cm}$，则点 P 到这个正六边形六条边的距离之和为（　　）cm．



A．18　　B．$9\sqrt{3}$　　C．9　　D．$18\sqrt{3}$

2．用圆心角为$120°$，半径为$3cm$的扇形纸片卷成一个圆锥形无底纸冒（如图所示），则这个纸冒的高是（　）





A．3cm　　B．$2\sqrt{2}\text{cm}$　　C．$3\sqrt{2}\text{cm}$　　D．$4\sqrt{2}\text{cm}$

3．如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于$\odot O$，阅读以下作图过程：

①作直径 AF；

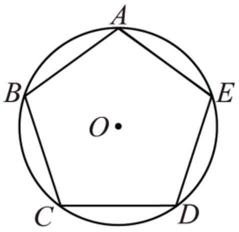
②以点 F 为圆心，FO为半径作圆弧，与$\odot O$交于点 M，N；

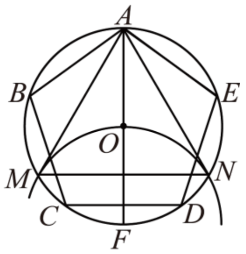
③连接 AM，MN，AN．

结论Ⅰ：$\triangle AMN$ 是等边三角形；

结论Ⅱ：从点 A 开始，以 DN 长为半径，在$\odot O$上依次截取点，再依次连接这些分点，得到正十八边形．

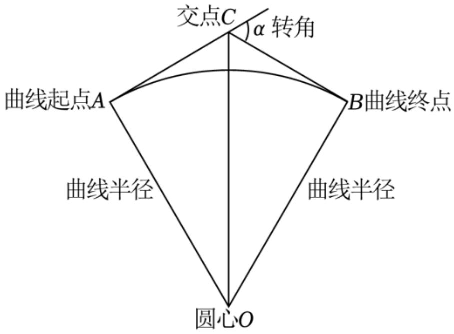
对于结论Ⅰ和结论Ⅱ，下列判断正确的是（　）





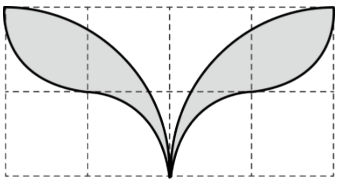
A．I和II都对　　　B．I和II都不对　　　C．I不对II对　　　D．I对II不对

4．中国高铁的飞速发展，已成为中国现代化建设的重要标志．如图是高铁线路在转向处所设计的圆曲线（即圆弧），高铁列车在转弯时的曲线起点为A，曲线终点为B，过点A，B的两条切线相交于点C，列车在从A到B行驶的过程中转角α为$60°$，若圆曲线的半径$OA=1.8$千米，则这段圆曲线$\overset{\frown}{AB}$的长为（　　）



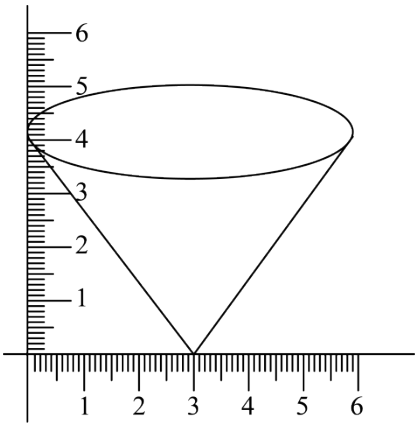
A．$\frac{\pi}{2}$　　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　　C．$\frac{3\pi}{5}$　　　D．$\frac{3\pi}{8}$

5．如图，小方格都是边长为1的正方形，则以格点为圆心，半径为1和2的两种弧围成的“叶状”阴影图案的面积为（　）

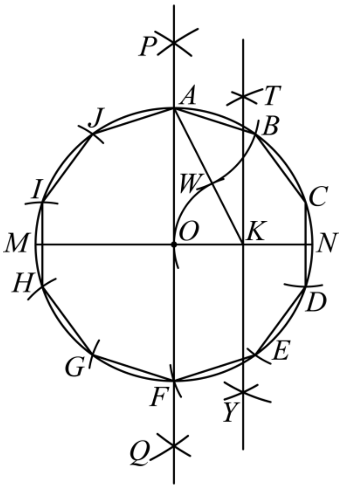


A．$2\pi-4$　　　B．$2\pi-2$　　　C．$4\pi-4$　　　D．$4\pi-2$

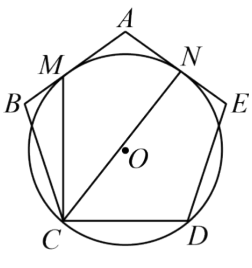
6．某同学用工具测一个圆锥形漏斗的尺寸，如图所示，由图中的数据可知圆锥形漏斗的侧面积为_____cm^2（结果保留π）．



7．尺规作图起源于希腊，是指用没有刻度的直尺和圆规，并且经过有限次的步骤来解决平面几何的作图形式．用尺规作图可以作出正十边形，其作图过程如下（如图所示）：①以MN为直径作出$\odot O$；②作出MN的垂直平分线，交$\odot O$于点A；③作出ON的垂直平分线，与ON交于点K；④连接AK，在AK上截取$KW=OK$；⑤在$\odot O$上依次截取$AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=HI=IJ=AW$．则十边形$ABCDEFGHIJ$就是正十边形．若$\odot O$的半径为$2$，则所作正十边形的边长为 ____．

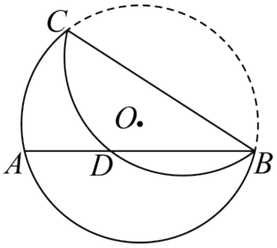


8．如图，已知正五边形$ABCDE$，经过C，D两点的$\odot O$与AB，AE分别相切于点M，N，连接CM，CN，则$\angle MCN=$________°．

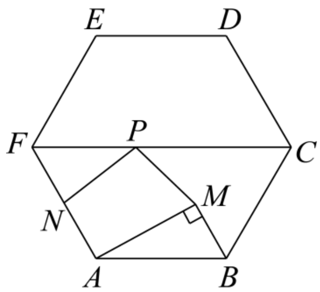


9．已知点A、B、C在$\odot O$上，$\angle ABC=30°$，把劣弧BC沿着直线CB折叠交弦AB于点

D．$BD=9$，$AD=6$，则 $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 _____．

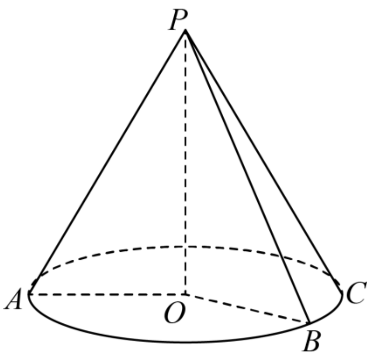


10．如图，点 M 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点（不包括边界），且 $AM \perp BM$，P 是 FC 上的一点，N 是 AF 的中点，则 $PN+PM$ 的最小值为_______．



11．如图，圆锥可以看作以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周形成的面所围成的旋转体．旋转轴叫做圆锥的轴，垂直于轴的边（另一条直角边）旋转而成的圆面叫做圆锥的底面，斜边旋转而成的曲面叫做圆锥的侧面，无论旋转到什么位置，斜边都叫做圆锥的母线．圆锥的侧面展开图是扇形．若扇形的半径为 R，圆心角为 $\alpha°$，面积为 S，弧长为 l，则有 $\dfrac{\alpha°}{360°}=\dfrac{S}{\pi R^2}=\dfrac{l}{2\pi R}$．

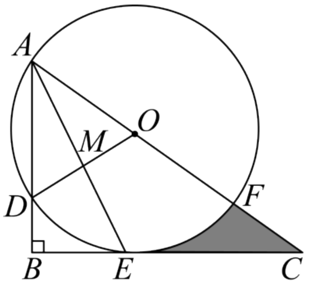
如果某圆锥的母线长是 5，底面半径是 3．



(1)求该圆锥侧面展开图的面积；

(2) PA 是圆锥的一条母线，过圆锥底面圆心 O 作 PA 的垂线，垂足为 M，求 OM 绕圆锥的轴旋转一周所得曲面将圆锥分成两部分的体积比．

12．如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E，O 为 AC 上一点，经过 A，E 的 $\odot O$ 分别交 AB，AC 于点 D，F，连接 OD 交 AE 于点 M.

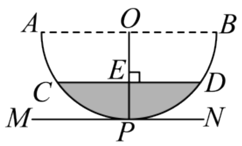


(1)求证：BC 是$\odot O$ 的切线；

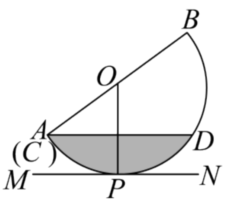
(2)若 $CF=2$，$EC=4$，求$\odot O$ 的半径；

(3)若 $AE=EC$，$\odot O$ 的半径为 2，求阴影部分面积．

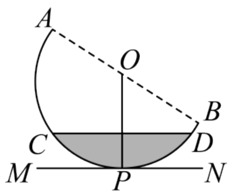
13．如图是从正面看到的一个“老碗”，其横截面可以近似的看成是如图（1）所示的以 AB 为直径的半圆 O，MN 为台面截线，半圆 O 与 MN 相切于点 P，连接 OP 与 CD 相交于点 E．水面截线 $CD=6\sqrt{3}\text{cm}$，$MN // CD$，$AB=12\text{cm}$．



图(1)



图(2)



图(3)

(1)如图（1）求水深 EP；

(2)将图（1）中的老碗先沿台面 MN 向左作无滑动的滚动到如图（2）的位置，使得 A 、C 重合，求此时最高点 B 和最低点 P 之间的距离 BP 的长；

(3)将碗从（2）中的位置开始向右边滚动到图（3）所示时停止，若此时 $\angle BOP=75°$，求滚动过程中圆心 O 运动的路径长．

14．阅读与思考

下面是博学小组研究性学习报告的部分内容，请认真阅读，并完成相应任务．

关于“等边半正多边形”的研究报告博学小组

研究对象：等边半正多边形

研究思路：类比三角形、四边形，按“概念—性质—判定”的路径，由一般到特殊进行研究．

研究方法：观察（测量、实验）—猜想—推理证明

研究内容：

【一般概念】对于一个凸多边形（边数为偶数），若其各边都相等，且相间的角相等、相邻

的角不相等，我们称这个凸多边形为等边半正多边形．如图①，我们学习过的菱形（正方形除外）就是等边半正四边形，类似地，还有等边半正六边形、等边半正八边形……

【特例研究】根据等边半正多边形的定义，对等边半正六边形研究如下：

概念理解：如图②，如果六边形 $ABCDEF$ 是等边半正六边形，那么

$AB=BC=CD=DE=EF=FA$， $\angle A=\angle C=\angle E$， $\angle B=\angle D=\angle F$，且 $\angle A\neq\angle B$．

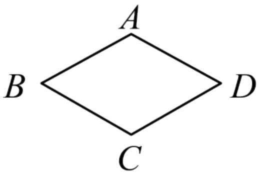


图1

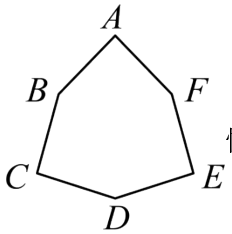


图2

性质探索：根据定义，探索等边半正六边形的性质，得到如下结论：

内角：等边半正六边形相邻两个内角的和为▲°．

对角线：……

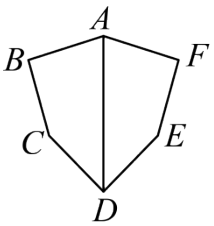


图3

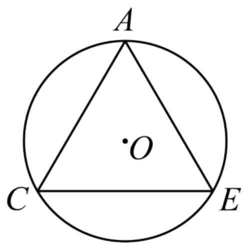


图4

任务：

(1)直接写出研究报告中“▲”处空缺的内容：________．

(2)如图③，六边形 $ABCDEF$ 是等边半正六边形．连接对角线 AD，猜想 $\angle BAD$ 与 $\angle FAD$ 的数量关系，并说明理由；

(3)如图④，已知 $\triangle ACE$ 是正三角形，$\odot O$ 是它的外接圆．请在图 4 中作一个等边半正六边形 $ABCDEF$（要求：尺规作图，保留作图痕迹，不写作法）．

15．【问题提出】

在绿化公园时，需要安装一定数量的自动喷洒装置，定时喷水养护，某公司准备在一块边长为18m的正方形草坪（如图 1）中安装自动喷洒装置，为了既节约安装成本，又尽可能提高喷洒覆盖率，需要设计合适的安装方案．

说明：一个自动喷洒装置的喷洒范围是半径为$r(\text{m})$的圆面．喷洒覆盖率$\rho=\dfrac{k}{s}$，s为待喷洒

区域面积，k 为待喷洒区域中的实际喷洒面积．

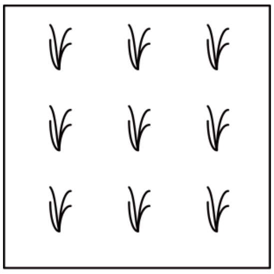


图1

【数学建模】

这个问题可以转化为用圆面覆盖正方形面积的数学问题．

【探索发现】

（1）如图 2，在该草坪中心位置设计安装 1 个喷洒半径为9m 的自动喷洒装置，该方案的喷洒覆盖率 $\rho=$______．

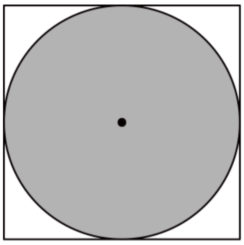


图2

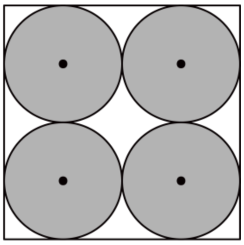


图3

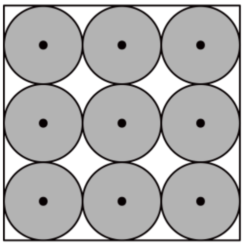


图4

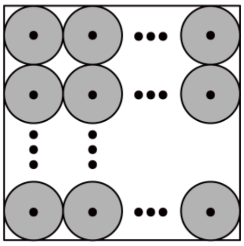


图5

（2）如图 3，在该草坪内设计安装 4 个喷洒半径均为 $\dfrac{9}{2}$m 的自动喷洒装置；如图 4，设计安装 9 个喷洒半径均为 3m 的自动喷洒装置；……，以此类推，如图 5，设计安装 n^2 个喷洒半径均为 $\dfrac{9}{n}$m 的自动喷洒装置．与（1）中的方案相比，采用这种增加装置个数且减小喷洒半径的方案，能否提高喷洒覆盖率？请判断并给出理由．

（3）如图 6 所示，该公司设计了用 4 个相同的自动喷洒装置喷洒的方案，且使得该草坪的喷洒覆盖率 $\rho=1$．已知正方形 $ABCD$ 各边上依次取点 F，G，H，E，使得 $AE=BF=CG=DH$，设 $AE=x\left(\text{m}\right)$，$\odot O_1$ 的面积为 $y\left(\text{m}^2\right)$，求 y 关于 x 的函数表达式，并

求当y取得最小值时r的值.

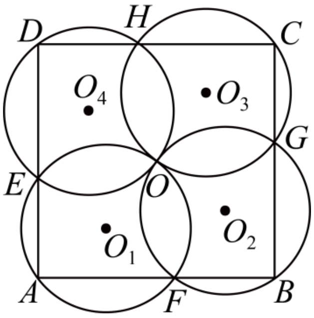


图6

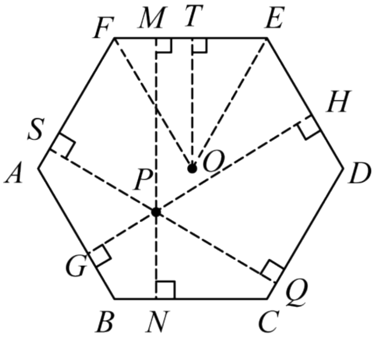
【问题解决】

（4）该公司现有喷洒半径为$3\sqrt{2}$m的自动喷洒装置若干个，至少安装几个这样的喷洒装置可使该草坪的喷洒覆盖率$\rho=1$？（直接写出结果即可）

1．B

【分析】此题考查了正多边形的性质，根据正六边形的性质求出正六边形的“边心距OT”，再将问题转化为“边心距”的6倍即可．.

【详解】解：设正六边形$ABCDEF$的中心为O，连接OE、OF，过点O作$OT\perp EF$，垂足为T，



$\because$正六边形$ABCDEF$，

$\therefore\angle EOF=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$，

$\because OE=OF$，

$\therefore\triangle EOF$是正三角形，

$\therefore OE=OF=EF=3\text{cm}$，$\angle OEF=60^\circ$

$\therefore OT=\dfrac{\sqrt{3}}{2}OE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

过点P分别作正六边形$ABCDEF$的各条边的垂线，垂足分别为M、N、S、Q、G、H，

则点P到这个正六边形六条边的距离之和$=MN+SQ+GH=6OT=9\sqrt{3}(\text{cm})$，

故选：B．

2．B

【分析】本题主要考查了扇形面积的计算．先求出扇形的弧长，根据扇形的弧长=圆锥的底面周长，用扇形的弧长$\div 2\pi$，可求圆锥的底面半径，利用勾股定理得出答案．

【详解】解：$\because$扇形的弧长$=\dfrac{120\cdot\pi\cdot 3}{180}=2\pi(\text{cm})$，

$\therefore$圆锥的底面半径为$2\pi\div 2\pi=1(\text{cm})$，

$\therefore$这个圆锥形筒的高为$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}(\text{cm})$．

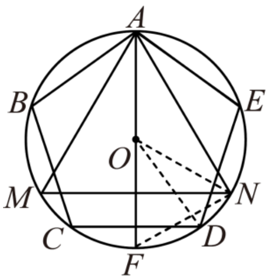
故选：B．

3．D

【分析】本题主要考查了圆周角定理、正多边形的性质，读懂题意，明确题目中的作图方式，熟练运用圆周角定理是解题的关键.

结论Ⅰ：连接ON、FN，由作图可知$\triangle OFN$是等边三角形，根据同弧（等弧）所对的圆周角相等即可得出结论；结论Ⅱ：在正五边形$ABCDE$和$\triangle AMN$中分别求出$\overset{\frown}{AD}$和$\overset{\frown}{AN}$所对的中心角的度数，进而可以求出$\angle NOD$的度数，根据公式即可求出正多边形的边数.

【详解】解：结论Ⅰ：连接ON、FN，



由作图可知：$FN=FO$，

$\because ON=OF$，

$\therefore ON=OF=FN$，

$\therefore \triangle OFN$是等边三角形，

$\therefore \angle OFN=60^{\circ}$，

$\therefore \angle AMN=\angle OFN=60^{\circ}$，

同理，$\angle ANM=60^{\circ}$，

$\therefore \angle ANM=\angle AMN=\angle NAM=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle AMN$是等边三角形；

结论Ⅱ：$\because \triangle AMN$是等边三角形，

$\therefore \angle AON=2\angle AMN=120^{\circ}$，

$\because \overset{\frown}{AD}=2\overset{\frown}{AE}$，

$\therefore \angle AOD=2\times 72^{\circ}=144^{\circ}$，

$\because \overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{AN}$，

$\therefore \angle NOD=144^{\circ}-120^{\circ}=24^{\circ}$，

$\therefore n=\dfrac{360}{24}=15$.

故结论Ⅰ正确，结论Ⅱ错误.

故选：D.

4．C

【分析】本题考查弧长公式，切线的性质等知识，解题的关键是记住弧长公式$l=\frac{n\pi r}{180}$．求出$\angle AOB=60^{\circ}$，再利用弧长公式求解．

【详解】解：$\because CA$，CB是切线，

$\therefore OA\perp AC$，$OB\perp CB$，

$\therefore \angle OAC=\angle OBC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB+\angle ACB=180^{\circ}$，

$\because \angle ACB+\alpha=180^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB=\alpha=60^{\circ}$，

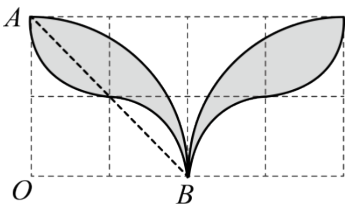
$\therefore \overset{\frown}{AB}$的长$=\frac{60\pi\times1.8}{180}=\frac{3}{5}\pi$．

故选：C．

5．A

【分析】此题主要考查了扇形的面积公式，应用与设计作图．连接AB，则阴影部分面积$=2\left(S_{扇形AOB}-S_{\vartriangle ABO}\right)$，依此计算即可求解．

【详解】解：连接AB，



由题意得，阴影部分面积$=2\left(S_{扇形AOB}-S_{\vartriangle AOB}\right)=2\left(\frac{90\pi\times2^{2}}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2\right)=2\pi-4$．

故选：A．

6．15π

【分析】本题考查圆锥的侧面积，以及勾股定理，先利用图形得到圆锥的高和底面圆的半径，再利用勾股定理计算出圆锥的母线长，然后根据圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长，结合扇形的面积公式$\frac{1}{2}lr$计算该圆锥形漏斗的侧面积，即可解题．

【详解】解：由图知，圆锥的高为4cm，底面圆的半径为3cm，

$\therefore$ 圆锥的母线长为$\sqrt{3^2+4^2}=5$（cm），

$\therefore$ 圆锥形漏斗的侧面积为$\frac{1}{2}\times\pi\times2\times3\times5=15\pi$（$cm^2$），

故答案为：15π.

7．$\sqrt{5}-1$或$-1+\sqrt{5}$

【分析】本题考查尺规作图，垂直平分线，勾股定理的知识，解题的关键是根据题意，尺规作图，得AF为$\odot O$的直径，$OA=ON=r=2$，TY是ON是垂直平分线，根据勾股定理求出AK，根据$AW=AK-KW$，$AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=HI=IJ=AW$，即可.

【详解】解：由题意得，MN是$\odot O$的直径，作出MN的垂直平分线，交$\odot O$于点A，

$\therefore AF$为$\odot O$的直径，

$\therefore OA=ON=r=2$，

$\because TY$是ON是垂直平分线，

$\therefore OK=KN=\frac{1}{2}ON=1$，

$\therefore AK=\sqrt{AO^2+OK^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\because KW=OK=1$，

$\therefore AW=AK-KW=\sqrt{5}-1$，

$\because AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=HI=IJ=AW$，

$\therefore AB=BC=CD=DE=EF=FG=GH=HI=IJ=AW=\sqrt{5}-1$，

$\therefore$正十边形的边长为$\sqrt{5}-1$.

故答案为：$\sqrt{5}-1$.

8．36

【分析】本题考查了切线的性质，正多边形，圆周角定理，连接OM，根据切线的性质和正多边形内角，可求得$\angle MON$的度数，再利用圆周角定理，可得$\angle MCN$的度数，熟练求出正多边形的内角，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：如图，连接OM，