四川省凉山州2024届高三二诊理科数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数$z=1+\mathrm{i}$，则$|\frac{z}{\bar{z}}|=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

2．已知集合$A=\{y|y=x+1,-1\le x\le 1\}$，$B=\{x|x\le a\}$，若$A\cup B=B$，则$a$的取值范围为（　）

A．$[0,2]$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(-\infty,1]$

3．已知$A(2,2)$在抛物线$C:y^2=2px$上，则A到C的焦点的距离为（　）

A．1　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．$\frac{5}{2}$

4．已知$X\sim N(1,\sigma^2)$，且$P(x\le a-1)=P(x\ge 2)$，则在$(\sqrt{x}+2a)^5$的展开式中，x^2的系数为（　）

A．5　　B．10　　C．15　　D．20

5．已知命题"$\forall x\in\mathrm{R}$，$\sin^2(\pi+x)+2\cos x+m\le 0$"是假命题，则$m$的取值范围为（　）

A．$[-2,+\infty)$　　B．$(-2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)$　　D．$(-\infty,-2]$

6．为了传承和弘扬雷锋精神，凝聚榜样力量．3月5日学雷锋纪念日来临之际，凉山州某中学举办了主题为"传承雷锋精神，践行时代力量"的征文比赛．此次征文共5个题目，每位参赛学生从中随机选取一个题目准备作文，则甲、乙，丙三位同学选到互不相同题目的概率为（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{9}{25}$　　D．$\frac{12}{25}$

7．已知正数a,b满足$a+2b=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}dx$，则$\frac{ab}{a^2+b}$的最大值为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\frac{1}{2\sqrt{2}+1}$　　D．$2\sqrt{2}+1$

8．若曲线$y=\sqrt{x}$在$x=1$处的切线与圆C：$x^2+y^2=4$交于A，B两点，则$|AB|$为（　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$\frac{\sqrt{95}}{5}$　　D．$\frac{2\sqrt{95}}{5}$

9．若实数x，y满足不等式$|x|+|y|\le 2$，则$x^2+y^2\le 1$的概率为（　）

A. $\frac{\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

10．已知在三棱锥$P-ABC$中，$PA=\sqrt{3}$，$PB=PC=2$，底面ABC是边长为1的正三角形，则该三棱锥的外接球表面积为（　）

A．3π　　B．$\frac{13\pi}{3}$　　C．4π　　D．6π

11．若$f\left(x\right)=x\sin x+\cos x-1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则函数$f\left(x\right)$的零点个数为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

12．已知点$P\left(x,y\right)$是曲线$y=x^2$上任意一点，则$\frac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}}$的最大值为（　）

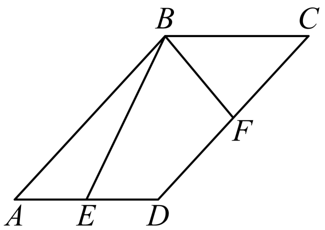
A．$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{10}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{10}$　　D．$\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{5}$

二、填空题

13．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3+a_5=10$，$a_4a_9=50$，则$S_6=$______.

14．设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}+\frac{b}{c}=1$，则$A=$______.

15．如图，在平行四边形$ABCD$中，E，F分别是AD，CD的中点，且$BE=6$，$BF=3$，$\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}\rangle=\frac{\pi}{3}$，则平行四边形$ABCD$的面积为______.



16．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$．点$A$在$C$上，点$B$在$y$轴．$\overrightarrow{F_1A}^2=\overrightarrow{F_1A}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)$，$\overrightarrow{F_2A}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，则$C$的渐近线方程为______.

三、解答题

17．设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=\frac{1}{2}$，$8S_6=7S_3$.

(1)求a_n；

(2)设$b_n=\frac{\log_{\frac{1}{2}}|a_n|}{|a_n|}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

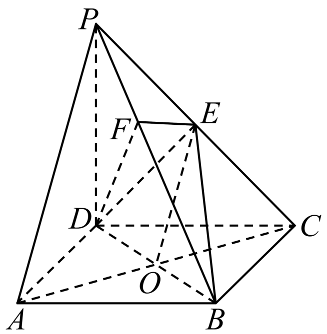
18．常言道：文史不分家，其实数学与物理也不分家．“近代物理学之父”——牛顿大约在 1671 年，完成了《流数法和无穷级数》这部书，标志着微积分的正式创立．某学校课题小组针对“高中学生物理学习成绩与数学学习成绩的关系”进行了一系列的研究，得到了高中学生两学科的成绩具有线性相关的结论．现从该校随机抽取 6 名学生在一次考试中的物理和数学成绩，如表（单位：分）

物理成绩 x	63	68	74	76	85	90
数学成绩 y	90	95	110	110	125	130

(1)经过计算，得到学生的物理学习成绩 x 与数学学习成绩 y 满足回归方程 $\hat{y}=1.5x+m$．若某位学生的物理成绩为 95 分，请预测他的数学成绩；

(2)若要从抽取的这 6 名学生中随机选出 3 名学生参加一项问卷调查，记数学成绩不低于 100 分的学生人数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

19．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp AD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD=2$，E 是 PC 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于 F．



(1)求证：$PA//$ 平面 BDE；

(2)求二面角 $F-CD-B$ 的正切值．

20．古希腊数学家阿基米德用“逼近法”得到：椭圆面积的 4 倍除以圆周率等于椭圆的长轴长与短轴长的积．已知 F_1 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左焦点，且椭圆 C 的面积为 $2\sqrt{3}\pi$，离心率为 $\frac{1}{2}$．

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设点 $A\left(t,0\right)$，$\left(t>-1\right)$，以 F_1A 为直径的圆与椭圆 C 在 x 轴上方交于 M，N 两点，求 $\frac{1}{t+1}\left(\left|F_1M\right|+\left|F_1N\right|\right)$ 的值

21．已知函数 $f\left(x\right)=x+a\sin x$．

(1)若函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上是增函数，求 a 的取值范围；

(2)设 $g\left(x\right)=x-\dfrac{1}{2}\sin x-\ln x$，若 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)\left(x_1\neq x_2\right)$，证明：$\sqrt{x_1x_2}<2$．

22．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$，（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，直线 l_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)-4\sqrt{2}=0$.

(1)求曲线 C 的普通方程与直线 l_1 的直角坐标方程；

(2)若与直线 l_1 垂直的直线 l_2 交曲线 C 于 A，B 两点，求 $\left|AB\right|$ 的最大值.

23．已知函数 $f\left(x\right)=\left|x\right|$.

(1)求不等式 $f\left(\ln x\right)\leq 1$ 的解集；

(2)若函数 $g(x)=f(x)-f\left(x-1\right)$ 的最小值为 m，且正数 a，b，c 满足 $a+b+c+2m=0$，求 $a^2+2b^2+c^2$ 的最小值.

参考答案：

1．B

【分析】

根据给定条件，利用共轭复数及复数除法运算，再求出复数的模.

【详解】复数 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$， $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$，

所以 $|\frac{z}{\bar{z}}|=1$.

故选：B

2．B

【分析】

求出函数值域化简集合 A，再利用给定的运算结果，借助包含关系求解即得.

【详解】集合 $A=\{y|y=x+1,-1\le x\le 1\}=[0,2]$，而 $B=(-\infty,a]$，

由 $A\cup B=B$，得 $A\subseteq B$，则 $a\ge 2$，

所以 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

故选：B

3．D

【分析】

由抛物线上点可求得 p，从而得到准线方程，结合抛物线定义可得结果.

【详解】$\because A(2,2)$ 在抛物线 C 上，$\therefore 4p=4$，解得： $p=1$，$\therefore$ 抛物线准线方程为： $x=-\frac{1}{2}$，

由抛物线定义知：点A到 C 的焦点的距离为 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

故选：D.

4．B

【分析】

先根据正态分布的对称性求出 a，在利用二项式定理求 x^2 的系数.

【详解】因为 $X\sim N(1,\sigma^2)$，且 $P(x\le a-1)=P(x\ge 2)$，

则 $a-1+2=2$，得 $a=1$，

则 $(\sqrt{x}+2a)^5=(\sqrt{x}+2)^5$，其含 x^2 的项为 $\mathrm{C}_5^1(\sqrt{x})^4\times 2=10x^2$，

即 x^2 的系数为 10.

故选：B.

5．B

【分析】

写出原命题的否定，即为真命题，然后将有解问题转化为最值问题求解即可.

【详解】命题“$\forall x\in\mathrm{R}$，$\sin^2(\pi+x)+2\cos x+m\le 0$”是假命题，

则“$\exists x_0\in\mathrm{R}$，$\sin^2(\pi+x)+2\cos x+m>0$”是真命题，

所以$m>-\sin^2(\pi+x)-2\cos x$ 有解，

所以$m>\left(-\sin^2(\pi+x)-2\cos x\right)_{\min}$，

又$-\sin^2(\pi+x)-2\cos x=-\sin^2 x-2\cos x=\cos^2 x-2\cos x-1=(\cos x-1)^2-2$，

因为$\cos x\in[-1,1]$，所以$\left(-\sin^2(\pi+x)-2\cos x\right)_{\min}=-2$，

即$m>-2$.

故选：B.

6．D

【分析】

根据分步计算原理得到总情况数，再利用排列公式得到满足题意的情况数，最后利用古典概率的计算公式即可.

【详解】甲同学可以选择一个题目共有 5 种选法，同理，乙、丙也有 5 种选法，

由分步乘法计数原理，3 人到四个社区参加志愿服务共有$5^3=125$种选法；

若甲、乙，丙三位同学选到互不相同题目，共有$\mathrm{A}_5^3=60$种选法；

则甲、乙，丙三位同学选到互不相同题目的概率为$P=\dfrac{60}{125}=\dfrac{12}{25}$.

故选：D.

7．C

【分析】

先求出$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}dx$得到$a+2b=1$，然后代入$\dfrac{ab}{a^2+b}$，利用基本不等式求最值即可.

【详解】$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}dx=\ln x\,|_1^{\mathrm{e}}=\ln\mathrm{e}-\ln 1=1$，则$a+2b=1$，

则 $\frac{ab}{a^2+b}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{a+2b}{a}}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}+1}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{2b}{a}}+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}+1}$，

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}$，即 $a=\frac{1}{\sqrt{2}+1},b=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ 时等号成立.

故选：C.

8．D

【分析】

根据给定条件，利用导数的几何意义求出切线 AB 的方程，再利用圆的弦长公式计算即得.

【详解】由 $y=\sqrt{x}$，求导得 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，依题意，切线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$，方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$，

即 $x-2y+1=0$，

圆 C：$x^2+y^2=4$ 的圆心 $C(0,0)$，半径 $r=2$，

点 $C(0,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{95}}{5}$.

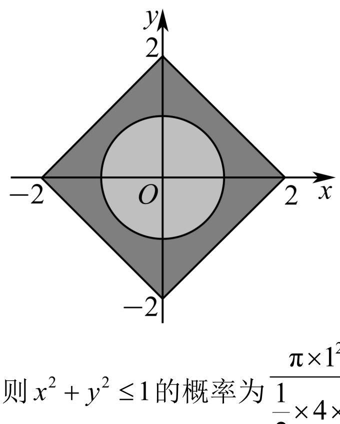
故选：D

9．A

【分析】

画出不等式 $|x|+|y|\le 2$ 表示的平面区域，同时画出 $x^2+y^2\le 1$，根据面积关系求概率.

【详解】$2\ge|x|+|y|=\begin{cases}x+y,x\ge 0,y\ge 0\\ x-y,x\ge 0,y<0\\ -x+y,x\langle 0,y\rangle 0\\ -x-y,x<0,y\le 0\end{cases}$，作出其表示的平面区域如下图阴影部分：



，

则 $x^2+y^2\le 1$ 的概率为 $\frac{\pi\times 1^2}{\frac{1}{2}\times 4\times 4}=\frac{\pi}{8}$.

故选：A.

10．B

【分析】

根据给定条件，证得 $PA\perp$平面 ABC，再确定三棱锥外接球球心，并求出球半径及表面积.

【详解】在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA=\sqrt{3}$， $PB=PC=2$，正 $\triangle ABC$ 的边长为 1，

则 $PA^2+AB^2=4=PB^2$，即有 $PA\perp AB$，同理 $PA\perp AC$，而 $AB\cap AC=A, AB, AC\subset$平面 ABC，

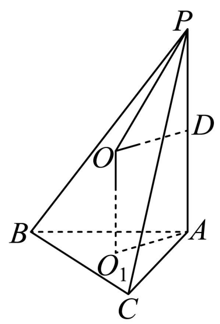
于是 $PA\perp$平面 ABC，令正 $\triangle ABC$ 的外心为 O_1，三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心为 O，

则 $OO_1\perp$平面 ABC，显然球心 O 在线段 PA 的中垂面上，取 PA 的中点 D，则 $OD\perp PA$，

而 $OO_1//PA$，则四边形 $ADOO_1$ 是矩形， $OD=O_1A=\frac{2}{3}\times AB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以球半径 $R=OP=\sqrt{OD^2+PD^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$，表面积 $S=4\pi R^2=\frac{13\pi}{3}$.

故选：B



11．C

【分析】

求导，研究函数单调性，极值，画图，根据图象得零点个数.

【详解】$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$,

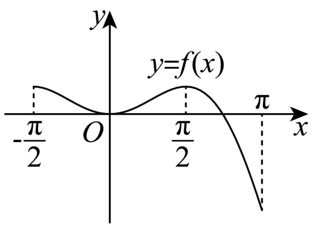
当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时， $f'(x)<0$， $f(x)$单调递减,

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时， $f'(x)>0$， $f(x)$单调递增,

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时， $f'(x)<0$， $f(x)$单调递减,

又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$， $f(0)=0$， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$， $f(\pi)=-2<0$，

则 $f(x)=x\sin x+\cos x-1$的草图如下：



由图象可得函数$f\left(x\right)$的零点个数为2.

故选：C.

12．D

【分析】

判断直线$\sqrt{3}x+y+1=0$与曲线的位置关系，利用式子$\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=2\cdot\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$表示的几何意义，转化为点$P$与点$(0,-1)$确定的直线同直线$\sqrt{3}x+y+1=0$夹角正弦最值求解即可.

【详解】依题意，$\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=2\cdot\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$，令直线$l:\sqrt{3}x+y+1=0$，显然$l$过点$A(0,-1)$，

由$\begin{cases}\sqrt{3}x+y+1=0\\ y=x^2\end{cases}$，得$\sqrt{3}x+x^2+1=0$，显然$\Delta=(\sqrt{3})^2-4<0$，

即直线l与曲线$y=x^2$相离，且$\sqrt{3}x+x^2+1>0$，则曲线$y=x^2$上的点P在直线l上方，

过P作$PH\perp l$于H，则$|PH|=\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}$，而$|PA|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$，

因此$\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=2\cdot\dfrac{|PH|}{|PA|}=2\sin\angle PAH$，

令过点A的直线与曲线$y=x^2$相切的切点为(t,t^2)，由$y=x^2$，求导得$y'=2x$，

则此切线斜率$2t=\dfrac{t^2+1}{t-0}$，解得$t=\pm1$，即切点为$(\pm1,1)$，

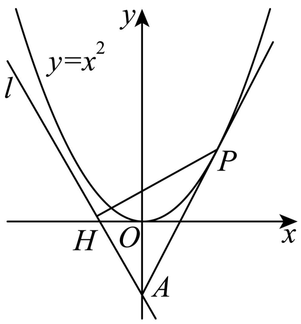
而点A在曲线$y=x^2$的对称轴上，曲线$y=x^2$在过点A的两条切线所夹含原点的区域及内部，

当点P的坐标为$(1,1)$时，锐角$\angle PAH$最大，$\sin\angle PAH$最大，$\dfrac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$最大，

此时$|PH|=\frac{2+\sqrt{3}}{2},|PA|=\sqrt{5}$，$\sin\angle PAH=\frac{|PH|}{|PA|}=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$，

所以$\frac{\sqrt{3}x+y+1}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$的最大值为$2\sin\angle PAH=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$.

故先：D



【点睛】

关键点点睛：涉及导数的几何意义的问题，求解时应把握导数的几何意义是函数图象在切点处的切线斜率，切点未知，设出切点是解题的关键.

13．27

【分析】

根据给定条件，利用等差数列性质求出公差，再求出S_6的值.

【详解】等差数列$\{a_n\}$中，由$a_3+a_5=10$，得$2a_4=10$，解得$a_4=5$，而$a_4a_9=50$，则$a_9=10$，

于是数列$\{a_n\}$的公差$d=\frac{a_9-a_4}{9-4}=1$，$a_3=a_4-d=4$，

所以$S_6=\frac{6(a_1+a_6)}{2}=3(a_3+a_4)=27$.

故答案为：27

14．$\frac{\pi}{3}$

【分析】

根据给定等式，利用正弦定理边化角，再利用和角的正弦公式计算即得.

【详解】在$\triangle ABC$中，由$\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}+\frac{b}{c}=1$及正弦定理得：

$\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}+\frac{\sin B}{\sin C}=1$，

而$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，