

重难点突破 06 恒成立与能成立问题

1. 恒成立问题的转化: $a > f(x)$ 恒成立 $\Rightarrow a > f(x)_{\max}$; $a \leq f(x)$ 恒成立 $\Rightarrow a \leq f(x)_{\min}$
2. 能成立问题的转化: $a > f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a > f(x)_{\min}$; $a \leq f(x)$ 能成立 $\Rightarrow a \leq f(x)_{\max}$
3. 恰成立问题的转化: $a > f(x)$ 在 M 上恰成立 $\Leftrightarrow a > f(x)$ 的解集为 M

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > f(x) \text{ 在 } M \text{ 上恒成立} \\ a \leq f(x) \text{ 在 } C_R M \text{ 上恒成立} \end{cases}$$

另一转化方法: 若 $x \in D, f(x) \geq A$ 在 D 上恰成立, 等价于 $f(x)$ 在 D 上的最小值 $f_{\min}(x) = A$, 若 $x \in D, f(x) \leq B$ 在 D 上恰成立, 则等价于 $f(x)$ 在 D 上的最大值 $f_{\max}(x) = B$.

4. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 对任意的 $x_1 \in [a, b]$, 存在 $x_2 \in [c, d]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f_{\min}(x) \geq g_{\min}(x)$
5. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 对任意的 $x_1 \in [a, b]$, 存在 $x_2 \in [c, d]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则 $f_{\max}(x) \leq g_{\max}(x)$
6. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 存在 $x_1 \in [a, b]$, 存在 $x_2 \in [c, d]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f_{\max}(x) \geq g_{\min}(x)$
7. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 存在 $x_1 \in [a, b]$, 存在 $x_2 \in [c, d]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则 $f_{\min}(x) \leq g_{\max}(x)$
8. 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$, 对任意的 $x_1 \in [a, b]$, 存在 $x_2 \in [c, d]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 A , $g(x)$ 在区间 $[c, d]$ 上的值域为 B , 则 $A \subset B$.
9. 若不等式 $f(x) > g(x)$ 在区间 D 上恒成立, 则等价于在区间 D 上函数 $y = f(x)$ 和图象在函数 $y = g(x)$ 图象上方.

10. 若不等式 $f(x) < g(x)$ 在区间 D 上恒成立, 则等价于在区间 D 上函数 $y = f(x)$ 和图象在函数 $y = g(x)$ 图象下方.

恒成立问题的基本类型

在数学问题研究中经常碰到在给定条件下某些结论恒成立的命题.

函数在给定区间上某结论成立问题, 其表现形式通常有: ①在给定区间上某关系恒成立; ②某函数的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$; ③某不等式的解为一切实数; ④某表达式的值恒大于 a 等等... 恒成立问题, 涉及到一次函数、二次函数的性质、图象, 渗透着换元、化归、数形结合、函数与方程等思想方法, 有利于考查学生的综合解题能力, 在培养思维的灵活性、创造性等方面起到了积极的作用. 因此也成为历年高考的一个热点.

恒成立问题在解题过程中大致可分为以下几种类型:

①一次函数型; ②二次函数型; ③变量分离型; ④根据函数的奇偶性、周期性等性质; ⑤直接根据函数的图象.

二、恒成立问题解决的基本策略

大家知道, 恒成立问题分等式中的恒成立问题和不等式中的恒成立问题. 等式中的恒成立问题, 特别是多项式恒成立问题, 常简化为对应次数的系数相等从而建立一个方程组来解决问题的.

(一) 两个基本思想解决“恒成立问题”

思路 1. $m \geq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立 $\Leftrightarrow m \geq [f(x)]_{\max}$

思路 2. $m \leq f(x)$ 在 $x \in D$ 上恒成立 $\Leftrightarrow m \leq [f(x)]_{\min}$

如何在区间 D 上求函数 $f(x)$ 的最大值或者最小值问题, 我们可以通过习题的实际, 采取合理有效的方法进行求解, 通常可以考虑利用函数的单调性、函数的图像、二次函数的配方法、三角函数的有界性、均值定理、函数求导等等方法求函数 $f(x)$ 的最值.

1. (2023 春•海淀区期末) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x$.

(I) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 当 $a=2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的零点个数;

(III) 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq x$, 求实数 a 的最大值.

2. (2023•青羊区校级模拟) 已知函数 $f(x) = a \ln(x - \frac{\pi}{4}) + \sin x$, 其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 求证: 对任意的实数 a , 方程 $f(x) = \cos x$ 均有解.

3. (2023 春•通州区期末) 已知函数 $f(x) = x^2 - mx - 1$, $g(x) = x \ln x - 1$.

(I) 若 $f(x)$ 在区间 $(-2, 1)$ 上恰有一个极值点, 求实数 m 的取值范围;

(II) 求 $g(x)$ 的零点个数;

(III) 若 $m = 1$, 求证: 对于任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f(x) \geq g(x)$.

4. (2023 春•渝中区校级期末) (1) 不等式 $\ln x \leq mx - 1$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

(2) 当 $a \in (0, 1)$, 求证: $e^x - x^2 + (a - \frac{1}{3})x > \ln x$ (参考数据: $e^2 \approx 7.4$, $e^3 \approx 20.1$).

5. (2023•宜章县二模) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x - 2ax$, a 为常数, 且 $a > 0$.

(1) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, 如果存在两个不同的正实数 m, n 且 $f(m) + f(n) = 1 - 4a$, 证明:

$m + n > 2$.

6. (2023·河南开学) 已知函数 $f(x) = |x+2| + |2x-a|$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) > 6$ 的解集;

(2) 当 $a < -4$ 时, 若存在 $x_0 \in [-2, 4]$, 使得 $f(x_0) = 4$ 成立, 求 a 的取值范围.

7. (2023 春•西城区期末) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - a\ln x$, 其中 $a \in R$.

(I) 当 $a = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 存在两个不同的极值点 x_1, x_2 , 证明: $f(x_1) + f(x_2) > -\frac{5}{4}$.

8. (2023 春·东城区校级月考) 设函数 $f(x) = x(x^2 - 3x + a)$, $a \in R$.

(1) 当 $a = -9$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围;

(3) 若函数在区间 $(0, 2)$ 内存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $|f(x_1) - f(x_2)| > |f(x_1) + f(x_2)|$, 求 a 的取值范围.

9. (2023 春•朝阳期末) 已知函数 $f(x) = \ln(x-1) - a^2x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极值, 对 $\forall x \in (1, +\infty)$, $f(x) \geq bx + \ln \frac{x-1}{x} + 1$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

10. (2023 春•大连期末) 已知函数 $f(x) = 2\cos x + \ln(1+x) - 1$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上零点和极值点的个数, 并给出证明;

(2) 若 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq ax + 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

11. (2023 春·滨海新区校级月考) 已知函数 $f(x) = (2a-1)\ln x - \frac{1}{x} - 2ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) $a \neq 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若对任意的 $a \in [-2, -1)$, 当 $x_1, x_2 \in [1, e]$ 时恒有 $(m-2e)a - \frac{1}{e} + 2 \geq |f(x_1) - f(x_2)|$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

12. (2023 春•咸阳期末) 已知函数 $f(x) = (a-1)\ln x + x + \frac{a}{x}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 若对于任意 $x \in (1, e]$, 都有 $f(x) - \frac{a}{x} > 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/558054123067006130>