



2025

北师大版高中数学一轮复习课件（新高考新教材）

课时规范练58 翻折问题与探索性问题

1.(2024·河北邯郸模拟)如图1,四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, E,F 分别是 AD,BC 的中点, $AD=2BC=2EF=4$.将四边形 $ABFE$ 沿着 EF 折起到四边形 A_1B_1FE 处,连接 A_1C,A_1D,B_1C ,使得 $A_1C=3$,如图2, G 在 A_1E 上,且 $\overrightarrow{A_1E}=3\overrightarrow{A_1G}$.

(1)证明: $A_1C \parallel$ 平面 DFG ;

(2)求平面 DFG 与平面 A_1CD 夹角的余弦值.

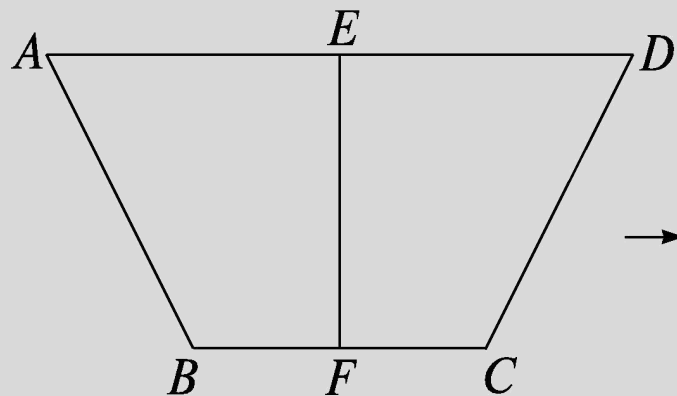


图1

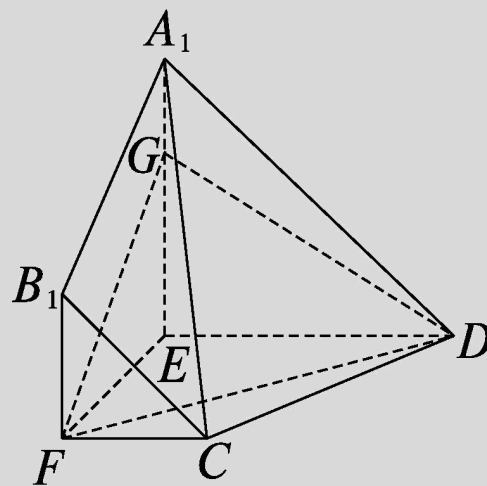


图2

(1) **证明** 连接 CE , 交 DF 于点 H , 连接 GH . 易证 $\triangle CHF \sim \triangle EHD$,

所以 $\frac{CH}{EH} = \frac{CF}{ED} = \frac{1}{2}$. 因为 $\overrightarrow{A_1E} = 3\overrightarrow{A_1G}$, 所以 $\frac{A_1G}{EG} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{CH}{EH} = \frac{A_1G}{EG}$, 则 $GH \parallel A_1C$.

因为 $GH \subset$ 平面 DFG , $A_1C \not\subset$ 平面 DFG , 所以 $A_1C \parallel$ 平面 DFG .

(2) **解** 由题图1可知 $A_1E \perp EF$, $DE \perp EF$.

因为 $AD = 2BC = 2EF = 4$, E, F 分别是 AD, BC 的中点, 所以 $CF = 1$, $EF = A_1E = 2$, 则 $CE = \sqrt{5}$. 因为 $A_1C = 3$, 所以 $CE^2 + A_1E^2 = A_1C^2$, 所以 $A_1E \perp CE$.

因为 $EF, CE \subset$ 平面 $CDEF$, 且 $EF \cap CE = E$, 所以 $A_1E \perp$ 平面 $CDEF$,
所以 $A_1E \perp ED$,

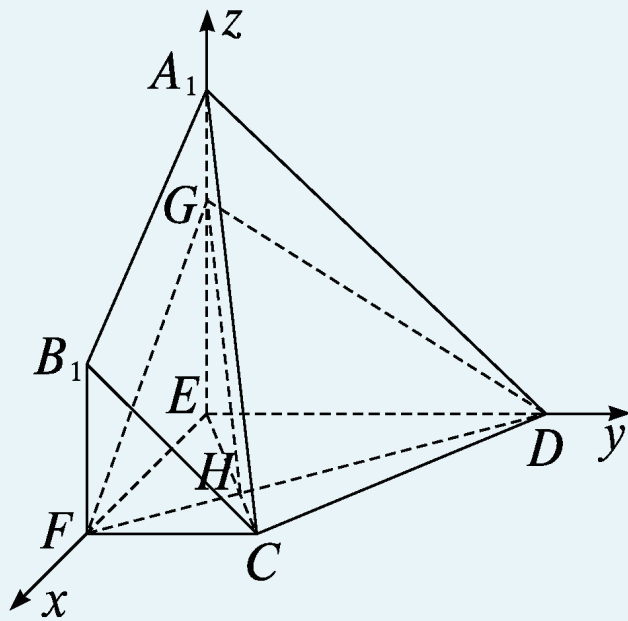
又 $ED \perp EF$, 故以 E 为坐标原点, 分别以直线 EF, ED, EA_1 为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

因为 $AD=4$, 所以 $A_1(0,0,2), C(2,1,0), D(0,2,0), F(2,0,0), G(0,0,\frac{4}{3})$,

则 $\overrightarrow{A_1C}=(2,1,-2), \overrightarrow{CD}=(-2,1,0), \overrightarrow{DF}=(2,-2,0), \overrightarrow{DG}=(0,-2,\frac{4}{3})$. 设平面 DFG 的法向量

为 $\mathbf{n}=(x_1, y_1, z_1)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 2x_1 - 2y_1 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DG} = -2y_1 + \frac{4}{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1=2$, 则 $y_1=2, z_1=3$, 则 $\mathbf{n}=(2,2,3)$.



设平面 A_1CD 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 2x_2 + y_2 - 2z_2 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD} = -2x_2 + y_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2=1$, 则 $y_2=2, z_2=2$, 则 $\mathbf{m}=(1,2,2)$.

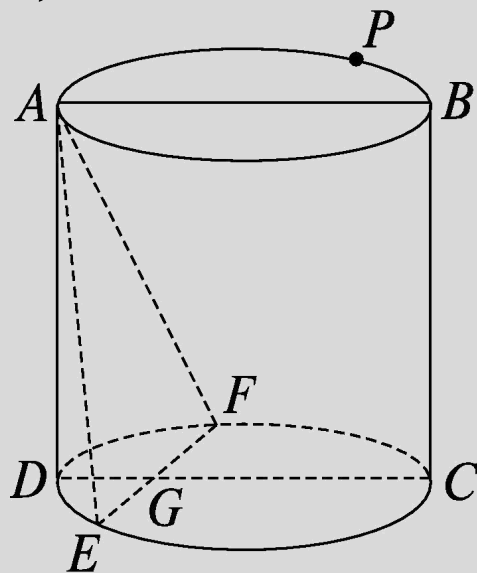
设平面 DFG 与平面 A_1CD 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{2+4+6}{\sqrt{4+4+9} \times \sqrt{1+4+4}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

2.(2024·山东烟台模拟)如图,圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长为6的正方形,下底面圆的一条弦 EF 交 CD 于点 G ,其中 $DG=2,DE=DF$.

(1)证明:平面 $AEF \perp$ 平面 $ABCD$.

(2)判断上底面圆周上是否存在点 P ,使得二面角 $P-EF-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$?若存在,求 AP 的长;若不存在,请说明理由.



(1) **证明** 由题意可知在下底面圆中, CD 为直径.

因为 $DE=DF$, 所以 G 为弦 EF 的中点, 且 $EF \perp CD$.

因为 $EF \perp AD$, $AD \cap CD = D$, $AD, CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$.

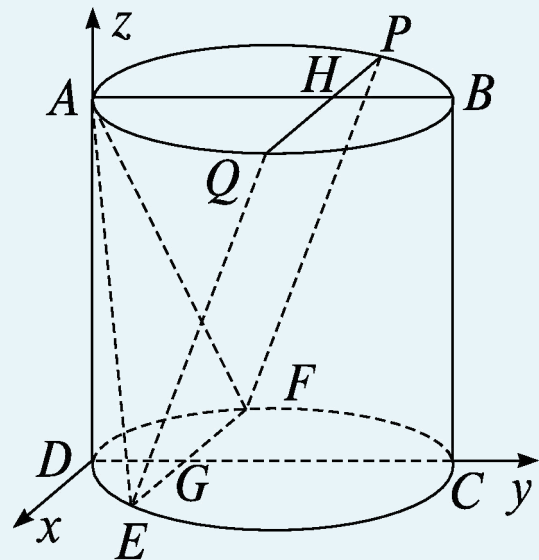
因为 $EF \subset$ 平面 AEF ,

所以平面 $AEF \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) **解** 设平面 PEF 交圆柱上底面于 PQ , 因为圆柱的上、下底面平行, 所以平面 PEF 与上、下底面的交线平行, 即 $EF \parallel PQ$. 设 PQ 交 AB 于点 H . 则二面角 $P-EF-A$ 的大小就是二面角 $H-EF-A$ 的大小.

分别以下底面垂直于 DC 的直线, 直线 DC , 直线 DA 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.

即 $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 3z_1, \end{cases}$ 令 $z_1=1$, 则 $\mathbf{m}=(0,3,1)$.



设平面 HEF 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x_2,y_2,z_2)$, 由
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EH} = 0, \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} -4\sqrt{2}x_2 = 0, \\ -2\sqrt{2}x_2 + (m-2)y_2 + 6z_2 = 0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ (m-2)y_2 + 6z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $y_2=-6$, 则 $\mathbf{n}=(0,-6,m-2)$.

所以
$$|\cos\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|} = \frac{|m-20|}{\sqrt{10} \times \sqrt{36+(m-2)^2}} = \frac{4}{5},$$

化简得 $3m^2+8m-80=0$, 解得 $m=4$ 或 $m=-\frac{20}{3}$ (舍). 即 $AH=4$.

因为 $EF \perp CD$, 所以 $PQ \perp AB$, 易知 $OH=1$,

所以 $PH=2\sqrt{2}$, $AP=\sqrt{AH^2 + PH^2} = \sqrt{16 + 8}=2\sqrt{6}$.

所以存在点 P , 使得二面角 $P-EF-A$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$, AP 的长为 $2\sqrt{6}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/558061065031007003>