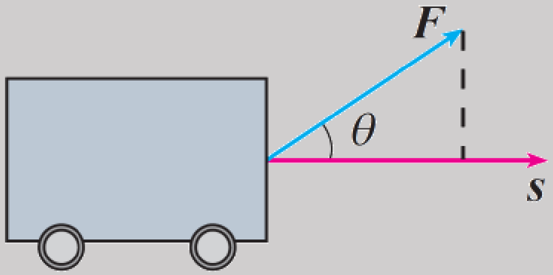
平面向量的概念与运算

向量的数量积

复习引入

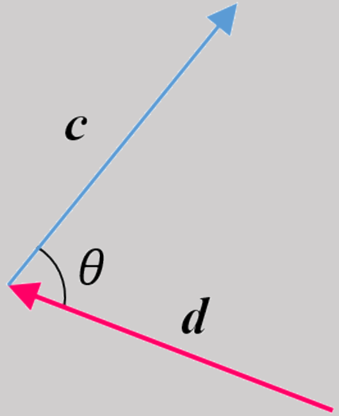
前面我们学习了向量的加、减、数乘运算，类比数的运算，出现了一个自然的问题：向量能否相乘呢？如果能，那么向量的乘法该如何定义？

情境 在物理课中我们学习过功的概念：如果一个物体在力$\boldsymbol{F}$的作用下产生位移$\boldsymbol{s}$，那么力$\boldsymbol{F}$所做的功$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，其中$\theta$是$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角.

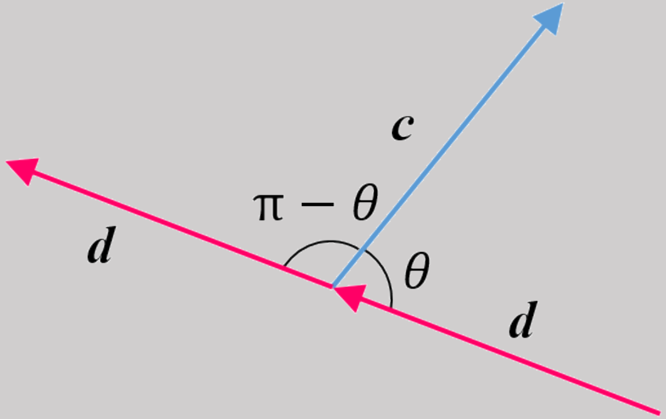


新知探究

追问1　如图，向量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$的夹角是否为θ？若不是，又是什么？



答案：向量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$的起点没有置于同一点，故夹角不是θ，平移向量$\boldsymbol{d}$至向量$\boldsymbol{c}$的起点，可知向量$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$夹角为$\pi-\theta$.



新知探究

追问2 对于任意两个非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，他们夹角的范围是什么呢？有哪些情况比较特殊？

两向量夹角的范围是$[0,\ \pi]$：

当$\theta = 0$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向；当$\theta = \pi$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反向；

当$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角为锐角；当$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角为钝角；

当$\theta = \frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角为直角，我们就说向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

新知探究

追问1 你能用自己的语言来描述一下向量数量积的定义吗？

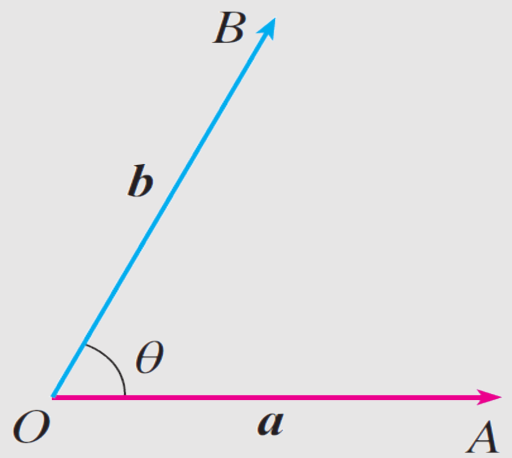
答案：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，即两个非零向量的数量积就等于它们模长的乘积再乘以夹角的余弦值.

追问2 向量数量积的运算结果是向量还是数量？

答案：是数量．因为表达式$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$中，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\cos\theta$都是数量，所以三者的乘积也是数量，这个数量的大小与两个向量的长度及其夹角有关.

复习回顾

1.已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O是平面上的任意一点，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\angle AOB=\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.



复习回顾

2、向量数量积的定义

已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，他们的夹角是θ，我们把数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫做向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积（或内积），记作

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

并规定：零向量与任一向量的数量积为0.

注意：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$中的“·”不能省略，也不能用“×”来代替.

复习回顾

3. 数量积的性质：

设 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量，它们的夹角是 θ，$\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向

(1) $\vec{a}\cdot\vec{e}=\vec{e}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta.$

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

θ =90º

(3) 当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线同向时，$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$；

当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线反向时，$\vec{a}\bullet\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

θ =0º

θ =180º

特别地，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

(4) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

(5) $|\vec{a}\bullet\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

| cos θ | ≤1

应用举例

例2　已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=\frac{2\pi}{3}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

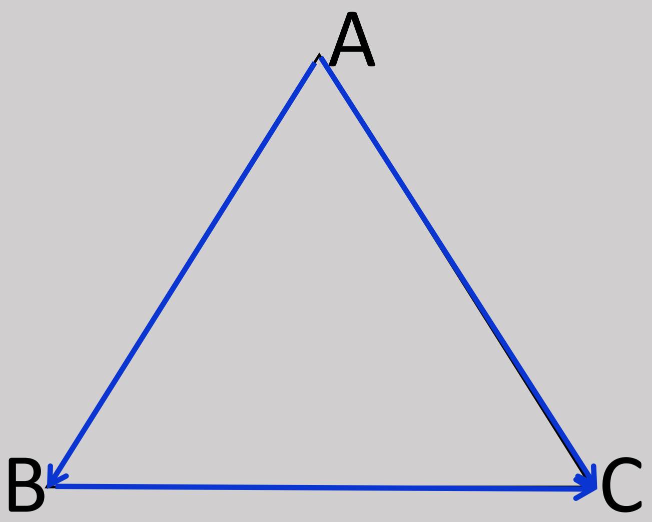
解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=5\times4\times\cos\frac{2\pi}{3}=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10.$

例3　已知正三角形ABC的边长为1，求：

(1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$；

(3)$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.



应用举例

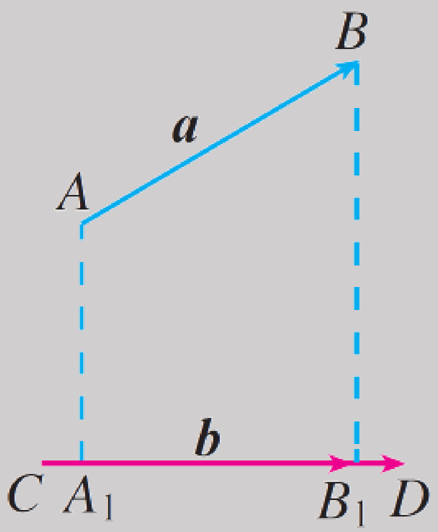
例4 设$|\boldsymbol{a}|=12$，$|\boldsymbol{b}|=9$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-54\sqrt{2}$，求$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$.

解：由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，得$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-54\sqrt{2}}{12\times 9}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{3\pi}{4}$.

新知探究

问题3　阅读教材P18页中间两段内容，说一说什么是向量的投影，什么是投影向量？



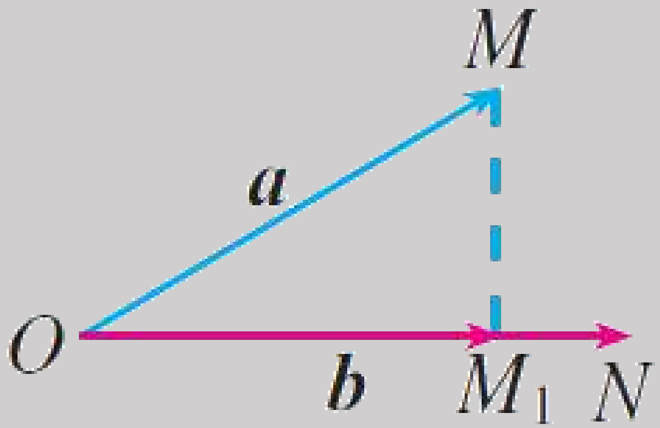
设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，我们作如下变换：

①过$\overrightarrow{AB}$的起点A和终点B，分别作$\overrightarrow{CD}$所在直线的垂线，垂足分别为A_1，B_1，得到向量$\overrightarrow{A_1B_1}$，我们称这种变换为向量$\boldsymbol{a}$向向量$\boldsymbol{b}$投影；

②上述过程中得到的向量$\overrightarrow{A_1B_1}$就叫做向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量.

新知探究

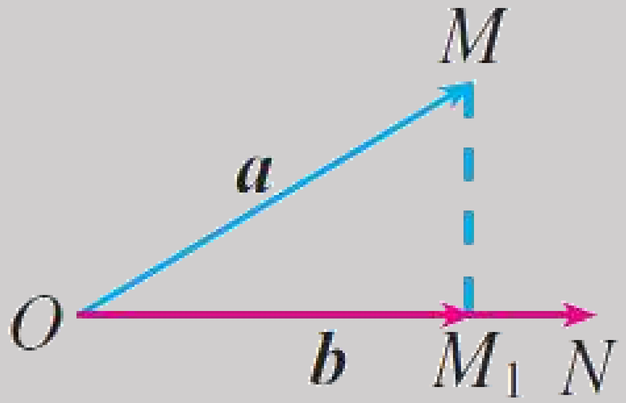
追问1 若在平面内任取一点O，作$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，此时向量$\boldsymbol{a}$又如何向向量$\boldsymbol{b}$作投影？投影向量又是谁？



答案：与前面的过程类似，此时因为两向量共起点，故只需过点M作直线ON的垂线，记垂足为M_1，得到的向量$\overrightarrow{OM_1}$就是向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量.

新知探究

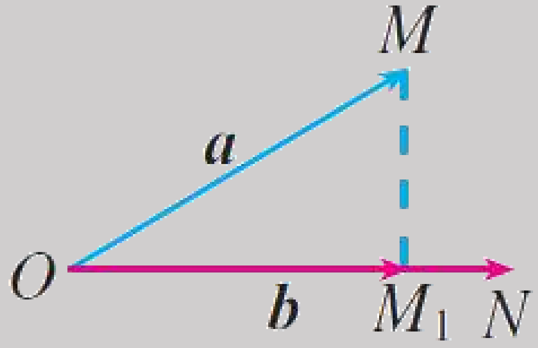
追问2 在追问1的条件下，设与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，那么$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$，θ之间有怎样的关系，来试着探究一下吧？



答案：显然，$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$共线，于是$\overrightarrow{OM_1}=\lambda\boldsymbol{e}$．下面我们尝试通过对$\theta$分类来讨论出更具体的关系．

追问2 在追问1的条件下，设与$\boldsymbol{b}$方向相同的单位向量为$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，那么$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$，θ之间有怎样的关系，来试着探究一下吧？

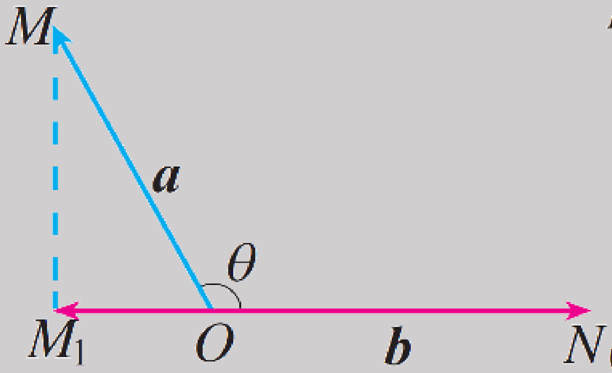
- 当θ为锐角时，$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$方向相同，$\lambda = |\overrightarrow{OM_1}| = |\boldsymbol{a}|\cos\theta$，所以$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$；

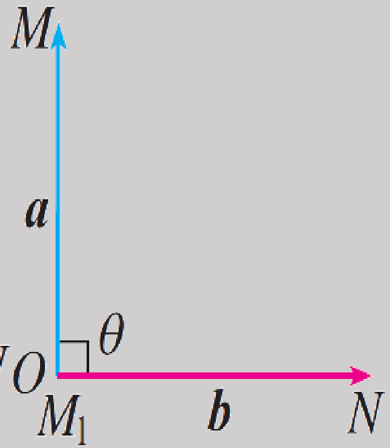


- 当θ为直角时，$\lambda = 0$，所以$\overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{0} = |\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{2}\,\boldsymbol{e}$；
- 当θ为钝角时，$\overrightarrow{OM_1}$与$\boldsymbol{e}$方向相反，

$\lambda = -|\overrightarrow{OM_1}| = -|\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\theta) = |\boldsymbol{a}|\cos\theta$，

所以$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$；





- 当$\theta = 0$时，$\lambda = |\boldsymbol{a}|$，所以$\overrightarrow{OM_1} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos 0\,\boldsymbol{e}$；
- 当$\theta = \pi$时，$\lambda = -|\boldsymbol{a}|$，所以$\overrightarrow{OM_1} = -|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e} = |\boldsymbol{a}|\cos\pi\,\boldsymbol{e}$；

对于任意的$\theta \in [0,\pi]$，都有$\overrightarrow{OM_1} = |\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$.