

2023 北京三十五中高二（上）期中

数学

2023.11

行政班_____教学班_____姓名_____学号_____

试卷说明：试卷分值 150，考试时间 120 分钟。

I 卷

一. 选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分.每小題只有一个正确选项，请选择正确答案填在机读卡相应的题号处）

1. 过点 $(1,0)$ 且与直线 $x-2y-2=0$ 垂直的直线方程是（ ）

A. $x-2y-1=0$

B. $x-2y+1=0$

C. $x+2y-1=0$

D. $2x+y-2=0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据两直线垂直设出直线方程，代入 $(1,0)$ ，求解即可.

【详解】设与直线 $x-2y-2=0$ 垂直的直线方程为 $2x+y+C=0$ ，

代入 $(1,0)$ ，得 $2 \times 1 + 0 + C = 0$ ，解得 $C = -2$ ，

所以与直线 $x-2y-2=0$ 垂直的直线方程为 $2x+y-2=0$

故选：D.

2. 若 $\vec{a} = (x, -1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, y, 6)$ ，且 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则（ ）

A. $x=1$ ， $y=2$

B. $x=1$ ， $y=-2$

C. $x=\frac{1}{2}$ ， $y=-2$

D. $x=-1$ ， $y=-2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间向量的共线条件，列出方程组，即可求解.

【详解】由题意，向量 $\vec{a} = (x, -1, 3)$ ， $\vec{b} = (2, y, 6)$ ，

因为 $\vec{a} // \vec{b}$ ，可得 $\begin{cases} x \times 6 - 2 \times 3 = 0 \\ -1 \times 6 - 3 \times y = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$ ，解得 $x=1, y=-2$.

故选：B.

3. 圆 $x^2 + y^2 + 2y = 1$ 的半径为

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】

【详解】试题分析：由题意得，圆 $x^2 + y^2 + 2y = 1$ ，可化为 $x^2 + (y+1)^2 = 2$ ，所以 $R = \sqrt{2}$ ，故选 B.

考点：圆的标准方程.

4. 椭圆 $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的焦点坐标为 ()

- A. (5,0), (-5,0) B. (3,0), (-3,0)
C. (0,5), (0,-5) D. (0,3), (0,-3)

【答案】B

【解析】

【分析】

根据椭圆的标准方程，求得 a, b, c 的值，即可求得椭圆的焦点坐标，得到答案.

【详解】由题意，椭圆 $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ ，可得 $a^2 = 17, b^2 = 8$ ，则 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$ ，

所以椭圆的焦点坐标为 (3,0) 和 (-3,0).

故选：B.

5. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ，则棱 BB_1 到面 AA_1C_1C 的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ B. a C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ D. $\sqrt{2}a$

【答案】C

【解析】

【分析】连接 A_1C_1, B_1D_1 ，它们交于点 O ，证明 $B_1D_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C ，得 B_1O 的长即为棱 BB_1 到面 AA_1C_1C 的距离，

【详解】如图，连接 A_1C_1, B_1D_1 ，它们交于点 O ，正方形中 $A_1C_1 \perp B_1D_1$ ，

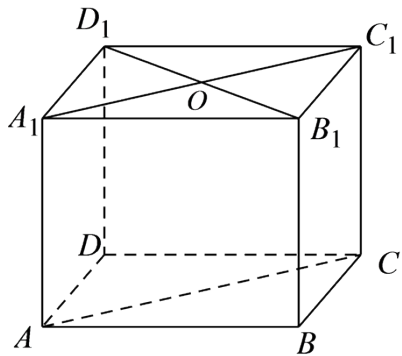
又 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $B_1D_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $AA_1 \perp B_1D_1$ ，

$AA_1 \cap A_1C_1 = A_1, AA_1, A_1C_1 \subset \text{平面 } AA_1C_1C$, 所以 $B_1D_1 \perp \text{平面 } AA_1C_1C$,

所以 B_1O 的长即为棱 BB_1 到面 AA_1C_1C 的距离, 而 $B_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以所求距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

故选: C.



6. 直线 $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 得到的弦长为

A. 1

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【详解】圆心到直线的距离为 $d = \frac{|-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = 1$,

则截得弦长 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{3}$.

故选 D.

【点睛】弦长的两种求法

①代数方法: 将直线和圆的方程联立方程组, 消元后得到一个一元二次方程. 在判别式 $\Delta > 0$ 的前提下, 利用根与系数的关系, 根据弦长公式求弦长.

②几何方法: 若弦心距为 d , 圆的半径长为 r , 则弦长 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

7. 已知平面 α , β , 直线 l, b , 如果 $\alpha \perp \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = l$, $M \in \alpha$, $M \in b$, 则 $l \perp b$ 是 $b \perp \beta$ 的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

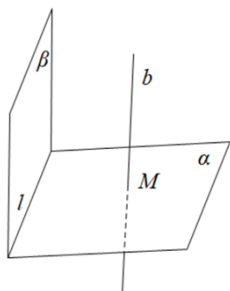
D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据必要不充分条件的定义判断可得答案.

【详解】如图, 若 $\alpha \perp \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = l$, $b \cap \alpha = M$, $b \perp \alpha$, 可得 $l \perp b$, 但 $b \parallel \beta$,



若 $\alpha \perp \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = l$, $b \cap \alpha = M$, $b \perp \beta$, 由线面垂直的性质定理可得 $l \perp b$,

所以 $l \perp b$ 是 $b \perp \beta$ 的必要不充分条件.

故选: B.

8. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $x \sin \theta + y - 1 = 0$ 的位置关系为 ()

- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 相切或相交

【答案】D

【解析】

【分析】由圆心到直线的距离与圆的半径的大小关系, 即可得到结果.

【详解】因为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心 $(0, 0)$, 半径 $r = 1$,

则圆心到直线的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta + 1}} \leq r = 1$,

所以直线与圆相切或相交.

故选: D

9. 已知圆 O_1 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 圆 O_2 的方程为 $(x - a)^2 + y^2 = 1$, 如果这两个圆有且只有一个公共点, 那么 a 的所有取值构成的集合是 ()

- A. $\{1, -1\}$ B. $\{3, -3\}$
C. $\{1, -1, 3, -3\}$ D. $\{5, -5, 3, -3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】

两个圆有且只有一个公共点, 两个圆内切或外切, 分别求出 a , 即可得出结论.

【详解】因为两圆有且只有一个公共点，

所以两个圆内切或外切，内切时， $|a|=1$ ，外切时， $|a|=3$ ，

所以实数 a 的取值集合是 $\{1, -1, 3, -3\}$ 。

故选：C.

【点睛】本题考查圆与圆的位置关系，利用几何性质解题是关键，考查学生的计算能力，比较基础.

10. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，已知 $\vec{a}=(1,2,-2)$ ， $\vec{a}+\vec{b}=(x,y,z)$ ，其中 $x^2+y^2+z^2=1$ ，则 $|\vec{b}|$ 的最大值为 ()

A. 3

B. $1+\sqrt{5}$

C. $\sqrt{10}$

D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，求得 $\vec{b}=(x-1,y-2,z+2)$ ，根据其几何意义，代入计算，即可得到结果.

【详解】因为 $\vec{a}=(1,2,-2)$ ， $\vec{a}+\vec{b}=(x,y,z)$ ，则 $\vec{b}=(x-1,y-2,z+2)$ ，

且 $x^2+y^2+z^2=1$ ，其中点 (x,y,z) 可以看作球心在原点，半径为1的球上的点

所以 $|\vec{b}|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$ 表示球上的点到点 $(1,2,-2)$ 距离，

最大值为球心到点 $(1,2,-2)$ 的距离再加球的半径，

即 $\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}+1=4$ 。

故选：D

II 卷

二. 填空题 (共 5 个小题，每题 5 分，共 25 分，请将正确答案填在答题卡相应的题号处.)

11. 已知两条直线 $ax-y-2=0$ 和 $(a+2)x-y+1=0$ 互相垂直，则 a 等于_____.

【答案】-1

【解析】

【分析】根据两直线垂直的结论求解即可.

【详解】由题意得， $a(a+2)+(-1)\times(-1)=0$ ，

解得 $a=-1$ 。

故答案为：-1.

12. 已知正三角形 ABC 的边长为 4，则以点 B, C 为焦点，经过点 A 的椭圆标准方程为_____.

【答案】 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$

【解析】

【分析】由题意求出 a, b ，讨论椭圆的焦点在 x, y 轴上即可得出答案.

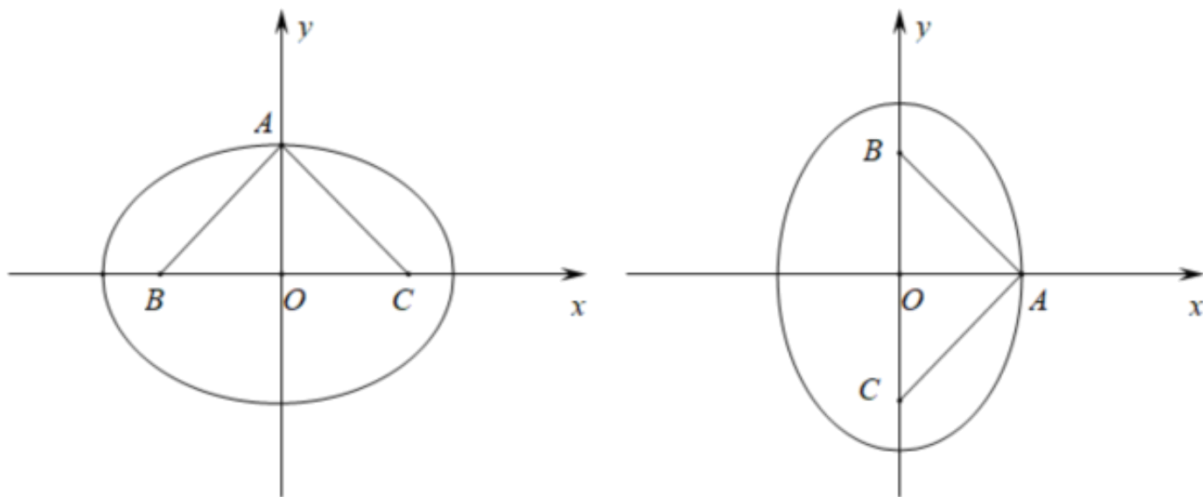
【详解】因为椭圆以点 B, C 为焦点，经过点 A ,

则 $2c = 4$, $a = 4$, 即 $c = 2, a = 4$,

所以 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$,

若椭圆的焦点在 x 轴上，椭圆的标准方程为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$,

若椭圆的焦点在 y 轴上，椭圆的标准方程为: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$.



故答案为: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 或 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$

13. 点 $P_1(5, 4)$ 关于直线 $l: x + y - 1 = 0$ 的对称点为 P_2 , 则点 P_2 的坐标为_____.

【答案】 $(-3, -4)$

【解析】

【分析】设 $P_2(a, b)$, 依题意可得 $\begin{cases} \frac{b-4}{a-5} = 1 \\ \frac{a+5}{2} + \frac{b+4}{2} - 1 = 0 \end{cases}$, 解得即可.

【详解】设 $P_2(a, b)$ ，则
$$\begin{cases} \frac{b-4}{a-5} = 1 \\ \frac{a+5}{2} + \frac{b+4}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$
，解得
$$\begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$$
，

所以点 P_2 的坐标为 $(-3, -4)$ 。

故答案为： $(-3, -4)$

14. 已知 $M = \{(x, y) | x - \sqrt{3} = \sqrt{2y - y^2}\}$ ， $N = \{(x, y) | y = \sqrt{3}x + b, b \in \mathbb{R}\}$ ，若 $M \cap N \neq \emptyset$ ，则 b 的取值范围是_____。

【答案】 $[-4, -1]$

【解析】

【分析】根据题意，确定 M, N 表示的图形，将 $M \cap N \neq \emptyset$ ，转换为两图形有交点，结合图形求出 b 的取值范围。

【详解】因为 $\sqrt{2y - y^2} = \sqrt{-(y-1)^2 + 1}$ ，所以 $0 \leq x - \sqrt{3} \leq 1$ ，即 $\sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ ，

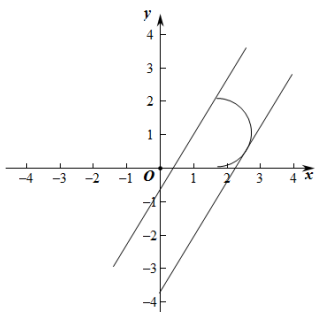
将 $x - \sqrt{3} = \sqrt{2y - y^2}$ 两边平方化简得 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y + 3 = 0$ ，

即 $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 1$ ， $\sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ ，

所以 M 表示以 $(\sqrt{3}, 1)$ 为圆心，半径为 1，且 $\sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ 的一个半圆，

$N = \{(x, y) | y = \sqrt{3}x + b, b \in \mathbb{R}\}$ 表示斜率为 $\sqrt{3}$ 的一条直线，

因为 $M \cap N \neq \emptyset$ ，所以直线与半圆有交点，如图，



结合图象可得，当直线过点 $(\sqrt{3}, 2)$ ，即 $2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + b$ ，解得 $b = -1$ ，

当直线与半圆相切时，可得 $\frac{|\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1 + b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 1$ ，即 $b = -4$ 或 $b = 0$ ，

结合图象可知， $b = 0$ 不符合题意，舍去，即 $b = -4$ ，

所以若 $M \cap N \neq \emptyset$ ，则 b 的取值范围是 $[-4, -1]$ ，

故答案为 $[-4, -1]$ 。

15. 已知曲线 $C: x^2 + y^2 = 2a|x| + 2y$ ，下列说法正确的有_____。

- ①曲线 C 关于 y 轴对称；
- ②存在 a ，使得曲线 C 与坐标轴的交点个数为 3；
- ③曲线 C 围成的区域面积 $S(a)$ 是关于 a 的增函数；
- ④当 $a \neq 0$ 时，直线 $l: y = 4ax$ 与曲线 C 有且仅有 2 个交点。

【答案】①③④

【解析】

【分析】因为曲线 C 中含有 $|x|$ ，所以对 x 分情况讨论，得到曲线 C 的方程，因为方程含参数 a ，所以需要
对 a 分 $a = 0$ ， $a > 0$ ， $a < 0$ 三种情况，可以画出三个图，然后根据图形判断四个选项即可。

【详解】对于①：因为 $x^2 + y^2 = 2a|x| + 2y$ ，所以有 $(x \pm a)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 1$ ，

即为：当 $x \geq 0$ 时， $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 1$ ，

当 $x < 0$ 时， $(x + a)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 1$

当 $a = 0$ 时，曲线 C 即为 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ，关于 y 轴对称，

当 $a \neq 0$ 时，曲线 C 表示的是关于 y 轴对称的圆的部分图象。①正确；

对于②：当 $x = 0$ 时， $y^2 = 2y$ ，所以曲线 C 过点 $(0, 0)$ ， $(0, 2)$ ，

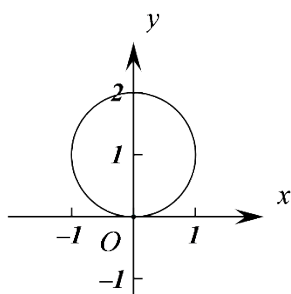
当 $y = 0$ 时， $x^2 = 2a|x|$ ，即： $|x|^2 = 2a|x|$ ，所以曲线 C 过点 $(0, 0)$ ， $(\pm 2a, 0)$ ，

当 $a = 0$ 时，曲线 C 与坐标轴有两个交点，当 $a \neq 0$ 时，曲线 C 与坐标轴有四个交点，

所以②错误；

对于③：当 $a = 0$ 时， $S = \pi \cdot 1^2 = \pi$ ，

如图所示：



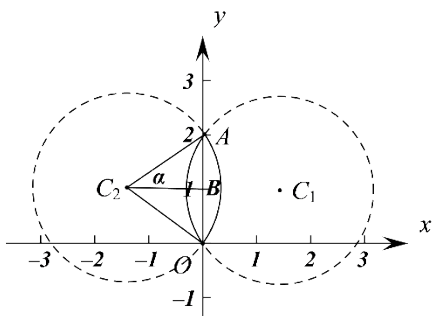
当 $a \neq 0$ 时，曲线 C 表示的两个圆的方程分别为：

$$C_1: (x+a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1, \text{ 圆心为 } (-a, 1), \text{ 半径 } r = \sqrt{a^2 + 1},$$

$$C_2: (x-a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1, \text{ 圆心为 } (a, 1), \text{ 半径 } r = \sqrt{a^2 + 1},$$

由②知，曲线 C 过 $(0, 0)$ ， $(0, 2)$ 两点，

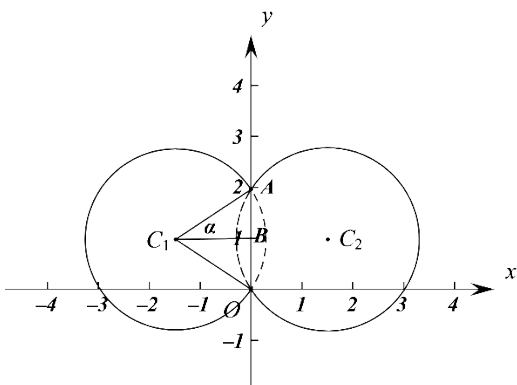
当 $a < 0$ 时，如图所示：



由图可知，曲线 C 恒过 $(0, 0)$ ， $(0, 2)$ ，且两个圆的圆心纵坐标均为 1，

所以曲线 C 围成的区域面积 $S(a)$ 随 a 的增大而增大；

当 $a > 0$ 时，如图所示：



由图可知，曲线 C 同样恒过 $(0, 0)$ ， $(0, 2)$ ，且两个圆的圆心纵坐标还是 1，

所以曲线 C 围成的区域面积 $S(a)$ 随 a 的增大而增大；

且 $a=0$ 时, 区域面积 $S(a)$ 介于 $a<0$ 和 $a>0$ 之间,

所以曲线 C 围成的区域面积 $S(a)$ 是关于 a 的增函数, ③正确;

对于④: 当 $a \neq 0$ 时, 若 $a < 0$, 联立
$$\begin{cases} y = 4ax \\ (x+a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1 \end{cases},$$

整理得: $x(1+16x^2)x - 6a = 0$, 解得: $x=0$ 或 $x = \frac{6a}{1+16a^2}$,

即 $y=4ax$ 与曲线 C 有且仅有 2 个交点;

若 $a > 0$, 联立
$$\begin{cases} y = 4ax \\ (x-a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1 \end{cases},$$

整理得: $x(1+16x^2)x - 10a = 0$, 解得: $x=0$ 或 $x = \frac{10a}{1+16a^2}$,

即 $y=4ax$ 与曲线 C 有且仅有 2 个交点, 所以④正确.

故答案为: ①③④

三. 解答题 (共 6 个小题, 共 85 分, 请将详细解答过程写在答题卡相应的位置.)

16. 已知两定点 $M(1,3)$ 、 $N(3,1)$, 动点 P 满足条件____, 求动点 P 的轨迹方程. 请从下列条件中任选一个补充到横线上, 并在此条件下完成题目.

条件①: 直线 PM 与直线 PN 垂直;

条件②: 点 P 到 M 、 N 两点距离平方之和为 20;

条件③: 直线 PM 与直线 PN 斜率之积为 4.

(注: 如果选择的条件不符合要求, 计 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别作答, 按第一个解答计分)

【答案】答案见解析

【解析】

【分析】根据题意, 列出动点 P 满足的方程, 化简即得轨迹方程.

【详解】选择条件①

设点 P 的坐标为 (x,y) ,

$\because$ 直线 PM 与直线 PN 垂直,

法一: 当 $x \neq 1$, $x \neq 3$ 时, $k_{PM} = \frac{y-3}{x-1}$, $k_{PN} = \frac{y-1}{x-3}$, 则 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -1$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/558067075135006117>