专题 2-1　函数的基本概念（解析式，定义域，值域）

近 4 年考情（2020-2024）		
考题统计	考点分析	考点要求
2021 年浙江卷：第 12 题，5 分	函数的解析式与定义域、值域问题是高考数学的必考内容.从近几年的高考情况来看，高考对函数的概念考查相对稳定，考查内容、频率、题型、难度均变化不大，函数的解析式在高考中较少单独考查，多在解答题中出现.高考对本节的考查不会有大的变化，仍将以分段函数、定义域、值域及最值为主.	(1)了解函数的含义，会求简单函数的定义域和值域 (2)会根据不同的需要选择恰当的方法(图象法、列表法、解析法)表示函数 (3)了解简单的分段函数，并会应用
2022 年浙江卷：第 14 题，5 分		
2023 年北京卷：第 11 题，5 分		
2024 年上海卷，第 2 题,5 分		

模块一　热点题型解读（目录）

【题型 1】函数的概念 2

【题型 2】 同一函数的判断 4

【题型 3】已知函数类型求函数的解析式（待定系数法求解析式） 5

【题型 4】建立方程组求解析式（方程思想） 6

【题型 5】求嵌套函数的解析式（换元或配凑） 8

【题型 6】求具体函数的定义域 9

【题型 7】已知定义域求参数 11

【题型 8】抽象函数的定义域问题 13

【题型 9】分离常数法求值域 15

【题型 10】换元法求函数的值域 16

【题型 11】对勾函数值域问题 18

【题型 12】已知值域求参数范围 19

【题型 13】分段函数及其应用 20

模块二　核心题型·举一反三

【题型 1】函数的概念

基础知识

一般地，设 A、B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$.

1．下列关系中是函数关系的是（　　）

A．等边三角形的边长和周长关系　　B．电脑的销售额和利润的关系

C．玉米的产量和施肥量的关系　　D．日光灯的产量和单位生产成本关系

【答案】A

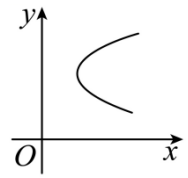
【解析】根据函数关系的定义可得，

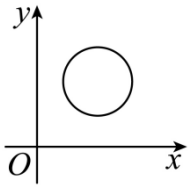
选项 A 中，当等边三角形的边长取一定的值时，周长有唯一且确定的值与其对应，

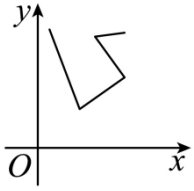
所以等边三角形的边长和周长符合函数关系；

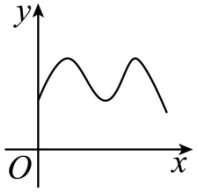
其他选项中，两个量之间没有明确的对应关系，所以不是函数关系故选：A

2．下列图象中，表示函数关系 $y=f(x)$ 的是（　）

A．

B．

C．

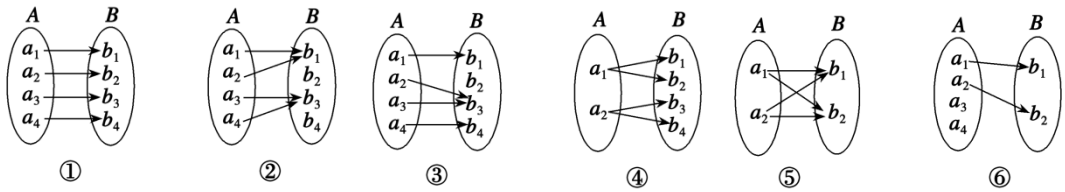
D．

【答案】D

【分析】利用函数的概念即可求解.

【详解】根据函数的定义知，一个 x 有唯一的 y 对应，由图象可看出，只有选项 D 的图象满足.

3．如图所示，下列对应法则，其中是函数的个数为（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】A

【解析】①②③这三个图所示的对应法则都符合函数的定义，

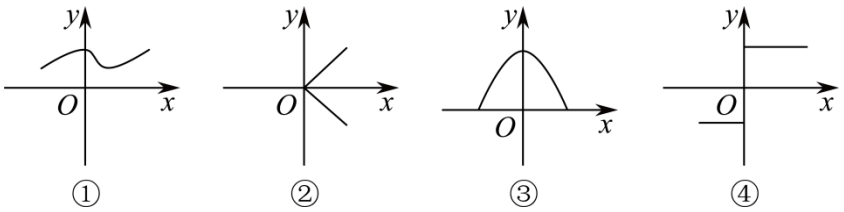
即 A 中每一个元素在对应法则下，在 B 中都有唯一的元素与之对应，

对于④⑤，A 的每一个元素在 B 中有 2 个元素与之对应，∴不是 A 到 B 的函数，

对于⑥，A 中的元素 a_3、a_4 在 B 中没有元素与之对应，∴不是 A 到 B 的函数，

综上可知， 是函数的个数为 3.故选：A.

【巩固练习 1】下列图象中，能表示函数$y=f(x)$图象的是（　）



A．①②　　B．②③　　C．②④　　D．①③

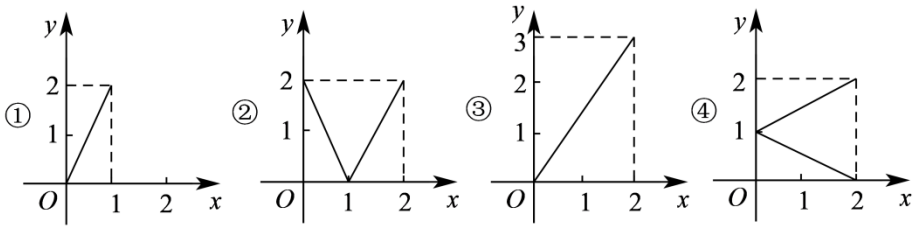
【解题思路】根据函数的定义判断可得出结论.

【解答过程】解：∵一个x只能对应一个y，∴①③符合题意，

对于②中，当$x>0$时，一个x对应两个y，不符合函数的定义；

对于④中，当$x=0$时，一个x对应两个y，不符合函数的定义.

【巩固练习 2】设集合 $M=\{x|0\le x\le 2\}$，$N=\{y|0\le y\le 2\}$.下列四个图象中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有（　）



A．3 个　　B．2 个　　C．1 个　　D．0 个

【答案】C

【分析】根据集合 M 到集合 N 的函数定义即可求解.

【详解】①中：因为在集合 M 中当 $1<x\le 2$ 时，

在 N 中无元素与之对应，所以①不是；

②中：对于集合 M 中的任意一个数 x，

在 N 中都有唯一的数与之对应，所以②是；

③中：$x=2$ 对应元素 $y=3\notin N$，所以③不是；

④中：当 $x=1$ 时，在 N 中有两个元素与之对应，

所以④不是；因此只有②满足题意

【题型 2】 同一函数的判断

基础知识

两个函数相同需要满足的条件是：1.**定义域相同**；2.**解析式相同**.

4.（2024·重庆·二模）下列函数中，与$y=x$是相同的函数是

A．$y=\sqrt{x^2}$　　B．$y=\lg 10^x$

C．$y=\frac{x^2}{x}$　　D．$y=\sqrt{(x-1)^2}+1$

【解题思路】求出各选项函数的定义域，并对解析式进行化简，要求所选函数的定义域和解析式都与函数$y=x$的定义域和解析式一致，可得出正确的选项.

【解答过程】对于 A 选项，函数$y=\sqrt{x^2}=|x|$定义域为R，其解析式与函数$y=x$的解析式不一致，两个函数不是同一函数；

对于 B 选项，函数$y=\lg 10^x=x$的定义域为R，其解析式与函数$y=x$的解析式一致，两个函数是同一函数；

对于 C 选项，函数$y=\frac{x^2}{x}$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，和函数$y=x$的定义域不一致，两个函数不是同一函数；

对于 D 选项，$y=\sqrt{(x-1)^2}+1=|x-1|+1$的定义域为$R$，但其解析式与函数$y=x$的解析式不一致，两个函数不是同一函数.

【巩固练习 1】（2024·山东·一模）下列各组函数中，表示同一函数的是(　　)

A．$f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=x$

B．$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$,$g(x)=x-2$

C．$f(x)=\frac{\sin 2x}{2\cos x}$,$g(x)=\sin x$

D．$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

【解题思路】根据同一函数的定义对四个选项中的两个函数进行比较即可.

【解答过程】选项 A:函数$f(x)$的定义域是$x>0$，函数$g(x)$的定义域是全体实数，故这两个函数不是同一函数；

选项 B:函数$f(x)$的定义域是$x\neq -2$，函数$g(x)$的定义域是全体实数，故两个函数不是同一函数；

选项 C: 函数$f(x)$的定义域是$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$,函数$g(x)$的定义域是全体实数，故两个函数不是同一函数；

选项 D:函数$f(x)$和$g(x)$的定义域都是全体实数，且$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，对应关系相同，所以是同一函数，故故选 D.

【巩固练习 2】（2024·黑龙江哈尔滨·模拟预测）下列各组函数中，表示同一个函数的是（　）

A．$f(x)=x,g(x)=\frac{x^2}{x}$　　B．$f(x)=x(x\in R),g(x)=x(x\in Z)$

C．$f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$　　D．$f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

【解题思路】分别求得函数的定义域和对应法则，结合同一函数的判定方法，逐项判定，即可求解.

【解答过程】对于 A 中，函数$f(x)=x$的定义域为R，函数$g(x)=\frac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，两函数的定义域不同，不是同一函数；

对于 B 中，函数$f(x)=x(x\in R)$和$g(x)=x(x\in Z)$的定义域不同，不是同一函数；

对于 C 中，函数$f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$与$g(x)=\begin{cases}x,x\geq 0\\-x,x<0\end{cases}$的定义域相同，对应法则也相同，所以是同一函数；

对于 D 中，函数$f(x)=x$的定义域为R，$g(x)=(\sqrt{x})^2$的定义域为$[0,+\infty)$，两函数的定义域不同，不是同一函数.

故选：C.

【题型 3】已知函数类型求函数的解析式（待定系数法求解析式）

基础知识

待定系数法：若已知函数的类型(如一次函数、二次函数)可用待定系数法来求解.

5．若二次函数$f(x)$满足$f(x+1)-f(x)=2x$,且$f(0)=2$.求$f(x)$的解析式

【答案】$f(x)=x^2-x+2$；（2）$m<0$

【解答】解：$f(x)=ax^2+bx+c$，由$f(0)=1$得$c=2$，故$f(x)=ax^2+bx+2$.

因为$f(x+1)-f(x)=2x$，所以$a(x+1)^2+b(x+1)+2-(ax^2+bx+2)=2x.$

即$2ax+a+b=2x$，所以$\begin{cases}2a=2\\a+b=0\end{cases}$，$\therefore\ \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，

所以$f(x)=x^2-x+2$

【巩固练习 1】已知二次函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(x)-2x+2$，且$f(0)=2$.求$f(x)$的解析式

【答案】$f(x)=-x^2+3x+2$

【思路点拨】设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，利用$f(x+1)=f(x)-2x+2$建立恒等式求解即可；

【详解】设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），

因为$f(0)=c=2$，所以$f(x)=ax^2+bx+2$.

由$f(x+1)=f(x)-2x+2$，得$a(x+1)^2+b(x+1)+2=ax^2+bx+2-2x+2$，

得$ax^2+(2a+b)x+a+b+2=ax^2+(b-2)x+4$，

所以$\begin{cases}2a+b=b-2\\a+b+2=4\end{cases}$，得$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$，故$f(x)=-x^2+3x+2$.

【巩固练习 2】已知函数$f(x)=-x^2-2x+3$，则$f(x+1)=$__$-x^2-4x$__.

【解题思路】代入函数解析式计算即可.

【解答过程】解：因为$f(x)=-x^2-2x+3$，所以$f(x+1)=-(x+1)^2-2(x+1)+3=-x^2-4x$，

$f(x+1)=\ -x^2-4x.$

故答案为：$-x^2-4x$.

【巩固练习 3】（2024·广东东莞·二模）已知函数$f(x)=ax-b(a>0)$，$f(f(x))=4x-3$，则$f(2)=$____.

【解题思路】利用直接代入法结合对应系数相等可得a,b的值，将2代入可得结果.

【解答过程】由题意，得$f(f(x))=f(ax-b)=a\cdot(ax-b)-b=a^2x-(ab+b)=4x-3$，

即$\begin{cases}a^2=4\\ab+b=3\\a>0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，$\therefore f(x)=2x-1$，因此$f(2)=3$

【题型 4】建立方程组求解析式（方程思想）

基础知识

已知关于$f(x)$与$f\left(\frac{1}{x}\right)$或$f(-x)$等的表达式，可根据已知条件再构造出另外一个等式组成方程组，通过解方程组求出$f(x)$.

6.（广东深圳实验校考）已知函数$y=f(x)$满足$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$，$x\in\mathbf{R}$且$x\neq0$，则$f(x)=$_____.

【答案】$f(x)=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3x}$

【思路点拨】用$\frac{1}{x}$替换x,再解方程组可得答案.

【详解】由$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2x$①，

用$\frac{1}{x}$替换x，得$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{2}{x}$②，

①×2－②，得$3f(x)=4x-\frac{2}{x}$，得$f(x)=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3x}$.

【巩固练习 1】（广东广雅中学校考）已知$f(\frac{1}{x})=\frac{x}{1-x^2}$，则$f(x)=$_____.

【答案】$\frac{x}{x^2-1}(x\neq0)$

【思路点拨】令$\frac{1}{x}=t$，得到$f(t)=\frac{t}{t^2-1}$，进而求得函数$f(x)$的解析式.

【详解】令$\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t}$且$t\neq0$，所以$f(t)=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2-1}{t^2}}=\frac{t}{t^2-1}$，

所以函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\frac{x}{x^2-1}(x\neq0)$

【巩固练习 2】若对任意实数x，均有$f(x)-2f(-x)=9x+2$，求$f(x)$.

【答案】$3x-2$.

【解析】利用方程组法求解即可；

$\because f(x)-2f(-x)=9x+2$（1）

$\therefore f(-x)-2f(x)=9(-x)+2$（2）

由$(1)+2\times(2)$得$-3f(x)=-9x+6$，

$\therefore f(x)=3x-2(x\in R)$.

故答案为：$3x-2$.

【巩固练习 3】已知定义在**R**上的函数$f(x)$满足$f(x)+xf(-x)=x^2+x$，则函数$f(x)$的解析式

$f(x)=$_____.

【答案】$\dfrac{2x^2+x-x^3}{1+x^2}$

【思路点拨】根据已知把x换成$-x$，建立方程组求解.

【详解】因为$f(x)+xf(-x)=x^2+x$，把x换成$-x$有：$f(-x)-xf(x)=x^2-x$，

联立$\begin{cases}f(x)+xf(-x)=x^2+x\\f(-x)-xf(x)=x^2-x\end{cases}$，解得$f(x)=\dfrac{2x^2+x-x^3}{1+x^2}$.

【题型 5】求嵌套函数的解析式（换元或配凑）

基础知识

换元法：已知复合函数$f(g(x))$的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围.

配凑法：由已知条件$f(g(x))=F(x)$，可将$F(x)$改写成关于$g(x)$的表达式，然后以x替代$g(x)$，便得$f(x)$的表达式.

7．函数$f(x)$满足若$f(g(x))=9x+3$，$g(x)=3x+1$，则$f(x)=$（　）

A．$f(x)=3x$　　B．$f(x)=3$

C．$f(x)=27x+10$　　D．$f(x)=27x+12$

【解题思路】对$f(g(x))$的式子适当变形，即可直接求出$f(x)$.

【解答过程】因为$f(g(x))=9x+3,g(x)=3x+1$，

所以$f(3x+1)=9x+3=3(3x+1)$，则$f(x)=3x$

8．若函数$f\left[g(x)\right]=6x+3$，且$g(x)=2x+1$，则$f(x)$等于（　　）

A．$12x+9$　　B．$6x+1$　　C．3　　D．$3x$

【答案】D

【解析】令$g(x)=2x+1=t$，则$x=\dfrac{t-1}{2}$

$\therefore f(t)=6\times\dfrac{t-1}{2}+3=3t$，即$f(x)=3x$故选：D.

【巩固练习 1】已知函数$f(1-x)=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$，则$f(x)=$（　）

A．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 0)$　　B．$\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$

C．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq 0)$　　D．$\frac{4}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$

【解题思路】利用换元法令$t=1-x$，运算求解即可.

【解答过程】令$t=1-x$，则$x=1-t$，且$x\neq 0$，则$t\neq 1$，

可得$f(t)=\frac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2}=\frac{1}{(t-1)^2}-1,(t\neq 1)$，

所以$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-1(x\neq 1)$.

【巩固练习 2】已知函数$f(x)$满足：$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则$f(x)$的解析式为（　）

A．$f(x)=x^2+2$　　B．$f(x)=x^2$

C．$f(x)=x^2+2(x\neq 0)$　　D．$f(x)=x^2-2(x\neq 0)$

【解题思路】通过化简即可得出函数的解析式.

【解答过程】因为$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$，$\therefore f(x)=x^2+2$，

【巩固练习 3】设函数$f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=2x+1$，则$f(x)$的表达式为（　　）

A．$\dfrac{1+x}{1-x}(x\neq 1)$　　B．$\dfrac{1+x}{x-1}(x\neq 1)$　　C．$\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$

D．$\dfrac{2x}{x+1}(x\neq -1)$

【答案】B

【解析】令$t=1+\dfrac{1}{x}(t\neq 1)$，则可得$x=\dfrac{1}{t-1}\left(t\neq 1\right)$

所以$f(t)=\dfrac{2}{t-1}+1=\dfrac{1+t}{t-1}(t\neq 1)$，所以$f(x)=\dfrac{1+x}{x-1}(x\neq 1)$，故选：B

【题型 6】求具体函数的定义域

基础知识

求给定解析式的函数的定义域，其实质就是以函数解析式中所含式子(运算)有意义为准则，列出不等式或不等式组求解；对于实际问题，定义域应使实际问题有意义.

9．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{(x-1)^{\frac{3}{4}}}+(x-2)^0$ 的定义域为_____

【答案】$(1,2)\cup(2,3]$

【解析】$\begin{cases}3-x\geq 0\\ x-1>0\\ x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\in(1,2)\cup(2,3]$

10．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3,6]$，则函数 $y=\dfrac{f(2x)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域为_____

【答案】$\left[\dfrac{3}{2},2\right)$

【解析】由函数 $f(x)$ 的定义域是 $[3,6]$，得到 $3\leqslant 2x\leqslant 6$，

故 $\begin{cases}3\leqslant 2x\leqslant 6\\ 2-x>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(2-x)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3\\ 2>x\\ 1<x<2\end{cases}$，解得：$\dfrac{3}{2}\leqslant x<2$；所以原函数的定义域是：$\left[\dfrac{3}{2},2\right)$.

【巩固练习 1】函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$(-\infty,3]$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(1,3]$　　D．$(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$

【解题思路】由函数形式得到不等式组，解出即可.

【解答过程】由题意得 $\begin{cases}(3-x)(x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $1<x\leq 3$，则定义域为 $(1,3]$

【巩固练习 2】函数 $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x}}+(2x-1)^0$ 的定义域为(　　)

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

C. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

【答案】D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/558104107000007033