

专题 05 圆中的重要模型之圆中的翻折模型

圆中的翻折模型是将一个圆形的纸片沿着一条直线翻折，使得纸片的边缘与直线重合，从而形成新的圆形或圆环。翻折前后，对应边相等，对应角相等，对应点之间的连线被折痕垂直平分。这种模型可以用于创建各种不同的图形和图案，是一种非常有趣的几何模型。

目录导航

例题讲模型

.....	1
模型 1.圆中的翻折模型（弧翻折必出等腰）	2

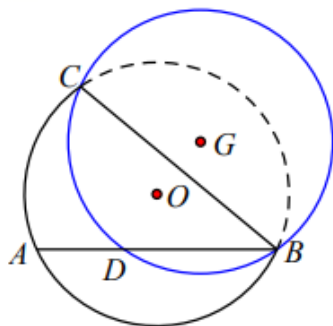
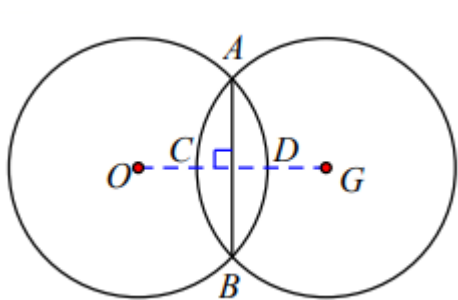
习题练模型

.....	19
-------	----

例题讲模型

【知识储备】

- 1、翻折变换的性质：翻折前后，对应边相等，对应角相等，对应点之间的连线被折痕垂直平分；
- 2、圆的性质：在同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧、弦相等；同弧或等弧所对的圆周角相等；
- 3、等圆相交：如图，圆 O 和圆 G 为两个相等的圆，圆 O 和圆 G 相交，相交形成的弦为 AB ，则弦 AB 为整个图形的对称轴，圆心 O 和圆心 G 关于 AB 对称，弧 ACB 和弧 ADB 为等弧，且关于 AB 对称；

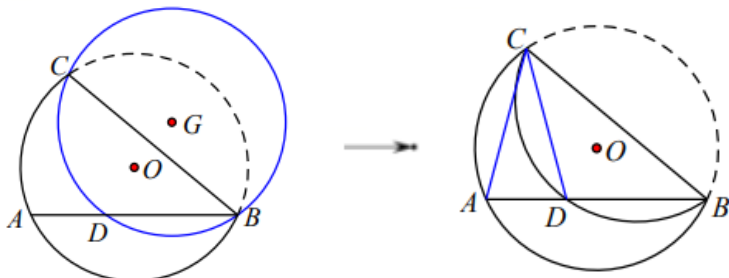


- 4、弧翻折（即等圆相交）：如图，以弦 BC 为对称轴，将弧 BC 翻折后交弦 AB 于点 D ，那么弧 CDB 所在的圆圆 G 与圆 O 是相等的圆，且两个圆关于 BC 对称，故圆心 O 、 G 也关于 BC 对称。

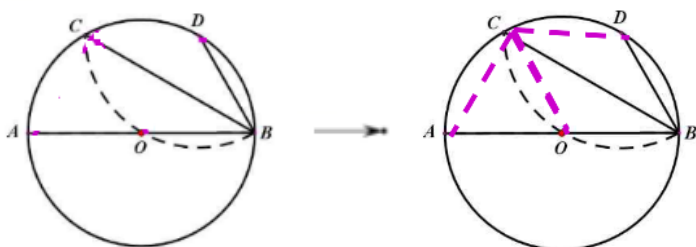
模型 1. 圆中的翻折模型（弧翻折必出等腰）

模型解读

1) 条件：如图，以圆 O 的一条弦 BC 为对称轴将弧 BC 折叠后与弦 AB 交于点 D ，结论： $CD=CA$



2) 条件：特别地，弧 BC 折叠后过圆心，结论： $CD=CA$ ， $\angle CAB=60^\circ$



模型证明

1) 证明：如图，设折叠后的 \widehat{BC} 所在的圆心是 G ，连接 AC ， CD 。

由题意得（折叠）： $\widehat{BC} = \widehat{BDC}$ ，即： $\widehat{BC} = \widehat{BD} + \widehat{DC}$ ， $\therefore \angle CAB = \angle DCB + \angle CBD$ ，

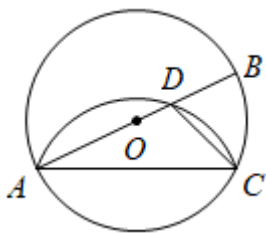
$\therefore \angle CDA = \angle DCB + \angle CBD$ ， $\therefore \angle CAB = \angle CDA$ ， $\therefore CD = CA$ 。

2) 证明：如图，连接 AC ， CD ， CO ；由 1) 中证明知： $CO = CA$ ，

$\therefore OA = OC$ ， $\therefore CO = CA = OA$ ， $\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形， $\therefore \angle CAB = 60^\circ$ 。

模型运用

例 1. (23-24 九年级上·江苏盐城·期中) 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径，点 C 为圆上一点，将劣弧沿弦 AC 翻折交 AB 于点 D ，连结 CD 。若点 D 与圆心 O 不重合， $\angle BAC = 25^\circ$ ，则 $\angle DCA$ 的度数为 ()



A. 50°

B. 45°

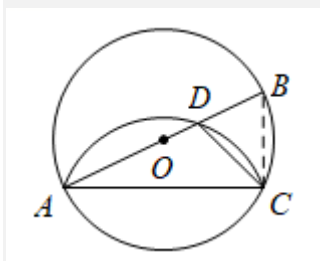
C. 40°

D. 35°

【答案】C

【分析】先连接 BC ，由 AB 是直径，可求得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，则可求得 $\angle B$ 的度数，然后由翻折的性质可得， \widehat{AC} 所对的圆周角为 $\angle B$ ， \widehat{ABC} 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ，继而求得答案。

【详解】解：连接 BC ，



$\because AB$ 是直径， $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， $\because \angle BAC = 25^\circ$ ， $\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ，

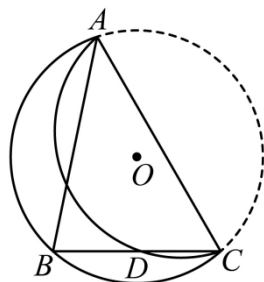
根据翻折的性质， \widehat{AC} 所对的圆周角为 $\angle B$ ， \widehat{ABC} 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ， $\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ$ ，

又 $\because \angle CDB + \angle ADC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle B = \angle CDB = 65^\circ$ ， $\therefore \angle DCA = \angle CDB - \angle A = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ$ 。故选：

C。

【点睛】本题考查圆的基本性质与折叠的性质，掌握圆周角定理及其推论以及折叠的性质是解题的关键。

例 2. (23-24 九年级下·浙江金华·阶段练习) 如图， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，将劣弧 \widehat{AC} 沿 AC 折叠后刚好经过弦 BC 的中点 D 。若 $AC = 6$ ， $\angle C = 60^\circ$ ，则 $\odot O$ 的半径长为 ()



A. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{7}$

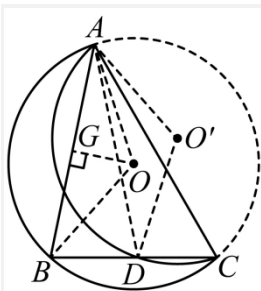
C. $\frac{1}{3}\sqrt{21}$

D. $\frac{2}{3}\sqrt{21}$

【答案】D

【分析】设折叠后的 \widehat{AC} 所在的圆心是 O' ，连接 $O'A$ ， $O'D$ ，进而得出 $AB = AD$ ，设 $\odot O$ 的半径是 r ，作 $OG \perp AB$ ，根据勾股定理得出 $AB = \sqrt{3}r$ ，在另一个图中作 $AM \perp BC$ ，设 $BM = DM = x$ ，表示 BD ， MC ，然后根据直角三角形的性质得出 $MC = 3$ ，即可求出 x 的值，进而得出 AM 和 BM ，再根据勾股定理求出 AB ，结合 $AB = \sqrt{3}r$ 可得答案。

【详解】如图，设折叠后的 \widehat{AC} 所在的圆心是 O' ，连接 $O'A$ ， $O'D$ ，

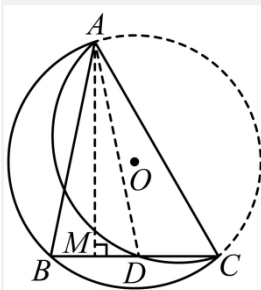


$\therefore \angle AOD = 2\angle ACB = 120^\circ$, 连接 OA, OB , 同理, $\angle AOB = 120^\circ$, $\therefore \angle ACB = \angle AOD$.

$\because \odot O$ 和 $\odot O'$ 是等圆, $\therefore AB = AD$. 设 $\odot O$ 的半径是 r , 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G .

$\because OA = OB, \angle AOB = 120^\circ, \therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ, AB = 2AG$,

$\therefore OG = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}r, \therefore AB = 2AG = 2\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}r)^2} = \sqrt{3}r$. 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,



$\because AB = AD$, 设 $BM = DM = x$, 则 $BD = 2x$.

$\because D$ 是 BC 的中点, $\therefore CD = BD = 2x, \therefore MC = DM + CD = 3x$.

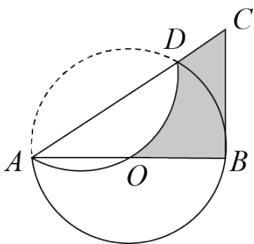
$\because AM \perp BC, \angle ACB = 60^\circ, \therefore \angle MAC = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中, $MC = \frac{1}{2}AC = 3$,

$\therefore 3x = 3$, 解得 $x = 1, \therefore AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = 3\sqrt{3}, BM = x = 1$.

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 2\sqrt{7}. \because AB = \sqrt{3}r, \therefore r = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. 故选: D.

【点睛】 本题是一道关于圆的综合问题, 难度较大, 考查了等腰三角形的性质, 勾股定理, 含 30° 直角三角形的性质等, 勾股定理是求线段长的常用方法.

例 3. (2023·山东青岛·一模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = 4, \angle ABC = 90^\circ$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D , 弧 AD 沿直线 AD 翻折后经过点 O , 那么阴影部分的面积为_____.



【答案】 $8\sqrt{3} - 2\pi / -2\pi + 8\sqrt{3}$

【分析】过点 O 作 $OM \perp AD$ 于点 M ，交折叠前的弧 AD 于点 N ，连接 NA, ND, OD ，证明四边形 $AODN$ 是菱形，且 $\triangle AON, \triangle DON$ 都是等边三角形，得到 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle DON}$ ，于是，

根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOB} - (S_{\triangle AOD} + S_{\text{弓形}OD}) = S_{\triangle AOB} - (S_{\triangle DON} + S_{\text{弓形}OD}) = S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形}NOD}$ 计算即可。

【详解】如图，过点 O 作 $OM \perp AD$ 于点 M ，交折叠前的弧 AD 于点 N ，连接 NA, ND, OD ， $\because AB$ 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，弧 AD 沿直线 AD 翻折后经过点 O ， $\therefore AN = AO = DN = DO = ON$ ，

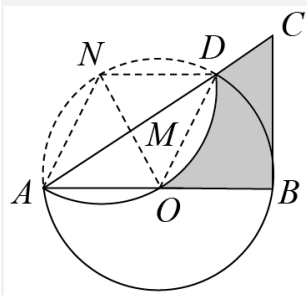
\therefore 四边形 $AODN$ 是菱形，且 $\triangle AON, \triangle DON$ 都是等边三角形，

$\therefore AN \parallel DO$ ， $\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle DON}$ ， $\therefore S_{\triangle AOD} + S_{\text{弓形}OD} = S_{\triangle DON} + S_{\text{弓形}OD} = S_{\text{扇形}NOD}$ ，

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOB} - (S_{\triangle AOD} + S_{\text{弓形}OD}) = S_{\triangle AOB} - (S_{\triangle DON} + S_{\text{弓形}OD}) = S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形}NOD}$ ，

\because 四边形 $AODN$ 是菱形，且 $\triangle AON, \triangle DON$ 都是等边三角形， $\therefore \angle DAB = 30^\circ, \angle DNO = 60^\circ$ ，

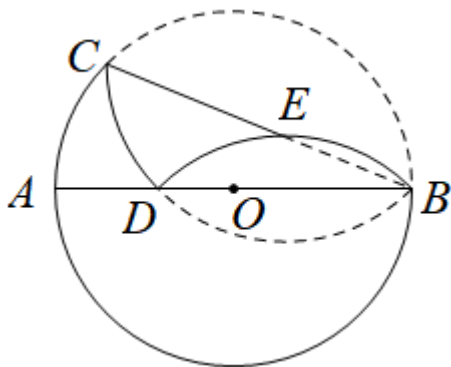
$\because BC = 4, \angle ABC = 90^\circ, \therefore AC = 2BC = 8, AB = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}, \therefore AN = AO = DN = DO = ON = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ ，



$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 - \frac{60^\circ \times \pi \times (2\sqrt{3})^2}{360^\circ} = 8\sqrt{3} - 2\pi$ 。故答案为： $8\sqrt{3} - 2\pi$ 。

【点睛】本题考查了直角三角形背景下与圆生成的阴影面积，熟练掌握圆的性质，扇形的面积公式，菱形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，勾股定理是解题的关键。

例 4. (23-24 九年级上·河南驻马店·期末) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的弦，先将 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折交 AB 于点 D ，再将 $\triangle BDC$ 沿 AB 翻折交 BC 于点 E 。若 $BE = DE$ ， $AB = 4$ ，则 BD 的长度为 _____。



【答案】 π

【分析】由同圆或等圆中相等的圆周角所对的弧相等可得 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BE}$ ，因此 $\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ 。结合 AB 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角的度数，再利用弧长公式计算 $\overset{\frown}{BD}$ 的长即可。

【详解】 $\because \overset{\frown}{AC}$ 、 $\overset{\frown}{CD}$ 、 $\overset{\frown}{DE}$ 、 $\overset{\frown}{BE}$ 所在的圆是等圆

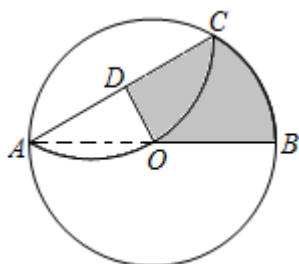
又 $\because \overset{\frown}{AC}$ 、 $\overset{\frown}{CD}$ 、 $\overset{\frown}{DE}$ 所对的圆周角都是 $\angle ABC \therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE}$

又 $\because \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BE} \therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{BE}$ 又 $\because \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{AB} \therefore \overset{\frown}{AC} = \frac{1}{4}\overset{\frown}{AB} \therefore \overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

又 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 $\therefore \overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角为 $\frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ \therefore \overset{\frown}{BD}$ 的长 $= \frac{90}{180} \pi \times 2 = \pi$ 故答案为 π

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，弧长的计算，翻折变换。求 $\overset{\frown}{BD}$ 所对的圆心角的度数是解题的关键。

例 5. (2024·安徽·校联考模拟预测) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，且 $AB=8$ ，点 C 是 $\odot O$ 上一点，连接 AC ，过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D ，将 $\overset{\frown}{AC}$ 沿直线 AC 翻折。若翻折后的圆弧恰好经过点 O ，则图中阴影部分的面积为 ()



A. $\frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

B. $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

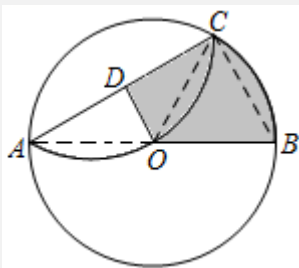
C. $\frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{2}$

D. $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】如图，连接 OC ， BC 。证明 $\triangle OBC$ 是等边三角形，利用分割法求解即可。

【详解】解：如图，连接 OC ， BC 。可得 $OB=OC=4$ ，



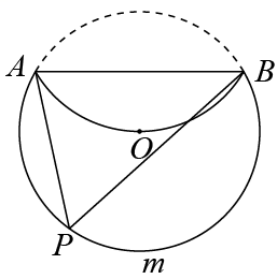
$\because \angle CAO = \angle CAB, \therefore \overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{BC}, \therefore OC = BC = OB, \therefore \angle COB = 60^\circ, \therefore \angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$

$\because OD \perp AC, \therefore \angle COD = 60^\circ, \therefore OD = \frac{1}{2}OC = 2, CD = \frac{\sqrt{3}}{2}OC = 2\sqrt{3},$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形}BOC} + S_{\text{VDOC}} = \frac{60\pi \times 4^2}{360} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}, \text{ 故选: A.}$$

【点睛】 本题考查扇形的面积，等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造特殊三角形解决问题。

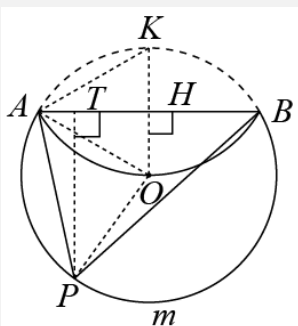
例 6. (2023·江苏·统考一模) 如图，将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠，使折叠后的弧恰好经过圆心 O ，点 P 是优弧 $\overset{\frown}{AMB}$ 上的一个动点 (与 A 、 B 两点不重合)，若 $\odot O$ 的半径是 2cm，则 $\triangle APB$ 面积的最大值是 _____ cm^2



【答案】 $3\sqrt{3}$

【分析】 过点 P 作 $PT \perp AB$ 于点 T ，过点 O 作 $OH \perp AB$ 于点 H ，交 $\odot O$ 于点 K ，连接 AO ， AK ， PO ，解直角三角形求出 AB ，求出 PT 的最大值，可得结论。

【详解】 解：如图，过点 P 作 $PT \perp AB$ 于点 T ，过点 O 作 $OH \perp AB$ 于点 H ，交 $\odot O$ 于点 K ，连接 AO ， AK ， PO 。



由题意得 AB 垂直平分线段 OK ， $\therefore AO = AK$ 。

$\because OA = OK$ ， $\therefore OA = OK = AK$ ， $\therefore \angle OAK = \angle AOK = 60^\circ$ 。

$\therefore AH = OA \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ， $\therefore OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ 。

$\because OH \perp AB$ ， $\therefore AH = BH$ ， $\therefore AB = 2AH = 2\sqrt{3}$ 。

$\because OP + OH \geq PT$ ， $\therefore PT \leq 2 + 1 = 3$ ， $\therefore PT$ 的最大值为 3，

$\therefore \triangle APB$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 。故答案为： $3\sqrt{3}$ 。

【点睛】 本题考查垂径定理，勾股定理，三角形的面积，垂线段最短等知识，解题关键是求出 PT

的最大值.

例 7. (23-24 九年级上·浙江金华·期中) 在 $\odot O$ 中, AB 为直径, 点 C 为圆上一点, 将劣弧沿弦 AC 翻折交 AB 于点 D , 连接 CD . (1) 如图 1, 若点 D 与圆心 O 重合, $AC = \sqrt{3}$, 求 $\odot O$ 的半径 r ;

(2) 如图 2, 若点 D 与圆心 O 不重合, $\angle BAC = 20^\circ$, 请求出 $\angle DCA$ 的度数.

(3) 如图 2, 如果 $AD = 6$, $DB = 2$, 求 AC 的长.

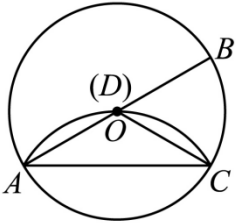


图1

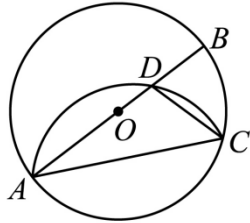


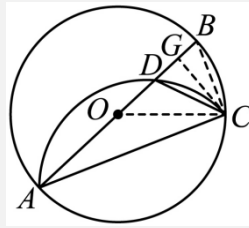
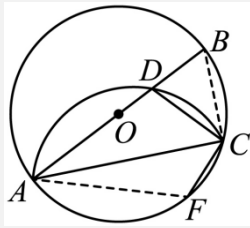
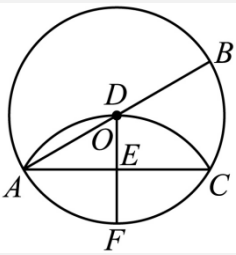
图2

【答案】 (1) 1 (2) $\angle DCA = 50^\circ$ (3) $2\sqrt{14}$

【分析】 (1) 设点 D 关于弦 AC 的对称点为 F , 连接 DF , 交 AC 于点 E , 则 $DE = EF, DF \perp AC, AE = EC$, 根据勾股定理, 得 $r^2 - (\frac{r}{2})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ 计算即可. (2) 设点 D 关于弦 AC 的对称点为 F , 连接 AF, CB , 得 $CB = CF = CD$, 因为 AB 为直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ, \angle B = \angle CDB = 70^\circ$, 利用 $\angle DCA = \angle CDB - \angle BAC$ 计算.

(3) 连接 OC, CB , 过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G , 确定 $BG = DG = \frac{1}{2}DB = 1$, $AB = AD + DB = 6 + 2 = 8$, 从而得到所以 r , 计算 $CG, AG, AC = \sqrt{AG^2 + CG^2}$.

【详解】 (1) 设点 D 关于弦 AC 的对称点为 F , 连接 DF , 交 AC 于点 E , 则 $DE = EF, DF \perp AC, AE = EC$,



因为 $AC = \sqrt{3}$, 所以 $AE = EC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 设 $DE = EF = \frac{r}{2}$, 则 $AD = DF = r$,

根据勾股定理, 得 $r^2 - (\frac{r}{2})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$, 解得 $r = 1$, 故圆的半径 r 为 1.

(2) 设点 D 关于弦 AC 的对称点为 F , 连接 AF, CB ,

根据题意, 得 $\angle BAC = \angle FAC = 20^\circ, CD = CF$, 所以 $CB = CF = CD$, 所以 $\angle B = \angle CDB$;

因为 AB 为直径, 所以 $\angle ACB = 90^\circ, \angle B = \angle CDB = 70^\circ$,

所以 $\angle DCA = \angle CDB - \angle BAC = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$.

(3) 如图, 连接 OC , CB , 过点 C 作 $CG \perp AB$ 于点 G , 根据 (2) 得到 $CB = CD$, 所以 $BG = DG$, 因为 $AD = 6$, $DB = 2$, 所以 $BG = DG = \frac{1}{2}DB = 1$, $AB = AD + DB = 6 + 2 = 8$, 所以 $r = OC = \frac{1}{2}AB = 4$, 所以 $OD = AD - OB = 6 - 4 = 2$, $OG = OD + DGB = 1 + 2 = 3$, 所以 $CG = \sqrt{OC^2 - DG^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, $AG = AD + DG = 6 + 1 = 7$, 所以 $AC = \sqrt{AG^2 + CG^2} = \sqrt{7^2 + (\sqrt{15})^2} = 2\sqrt{14}$.

【点睛】本题考查了圆的性质, 勾股定理, 垂径定理, 等腰三角形三线合一性质, 熟练掌握圆的性质, 勾股定理是解题的关键.

例 8. (2023·广西南宁·统考三模) 综合实践 在数学综合实践课上, 第一小组同学展示了如下的操作及问题 如图 1, 同学们先画出半径为 10cm 的 $\odot O_1$, 将圆形纸片沿着弦 AB 折叠, 使对折后劣弧 AB 恰好过圆心 O_1 , 同学们用尺子度量折痕 AB 的长约为 18cm, 并且同学们用学过的知识验证度量的结果是正确的.

验证如下: 如图 1, 过点 O_1 作 $O_1F \perp AB$ 于点 F , 并延长 O_1F 交虚线劣弧 AB 于点 E , $\therefore AB = 2AF$,

由折叠知, $EF = O_1F = \frac{1}{2}O_1E = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$, 连接 O_1A , 在 $Rt\triangle O_1FA$ 中, $O_1A = 10$,

根据勾股定理得, $AF = \sqrt{O_1A^2 - O_1F^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}(\text{cm})$,

$\therefore AB = 2AF = 10\sqrt{3} \approx 10 \times 1.732 \approx 17.32(\text{cm})$,

通过计算: $17.32 \approx 18$, 同学们用尺子度量折痕 AB 的长约为 18cm 是正确的.

请同学们进一步研究以下问题:

(1) 如图 2, $\odot O_2$ 的半径为 10cm, AB 为 $\odot O_2$ 的弦, $O_2C \perp AB$, 垂足为点 C , 劣弧 AB 沿弦 AB 折叠后经过 O_2C 的中点 P , 求弦 AB 的长 (结果保留根号); (2) 如图 3, 在 $\odot O_3$ 中劣弧 AB 沿弦 AB 折叠后与直径 CB 相交于点 Q , 若 $CQ = 8\text{cm}$, $BQ = 12\text{cm}$, 求弦 AB 的长 (结果保留根号).

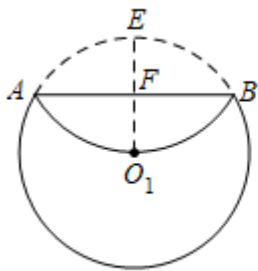


图1

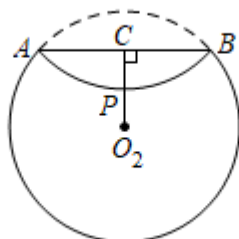


图2

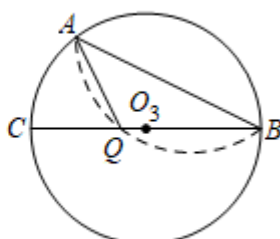


图3

【答案】(1) $\frac{20\sqrt{5}}{3}$ (2) $8\sqrt{5}$

【分析】(1) 连接 O_2A ，延长 O_2C 交 e_{O_2} 于点 D ，求出 O_2C ，再根据勾股定理可得出结论；

(2) 作点 Q 关于弦 AB 的对称点 Q' ，连接 BQ' 并延长与 CA 的延长线相交于 C' ，连接 AQ' ，先证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ ，可得 $CQ = C'Q' = 8$ ， $C'B = CB = 20$ ，

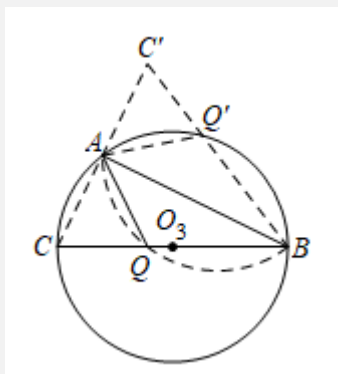
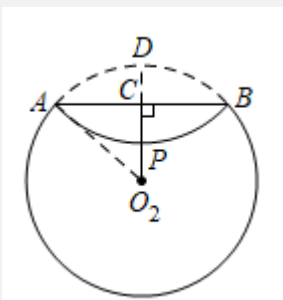
再证明 $\triangle C'AQ' \sim \triangle C'BC$ ，根据相似三角形的性质求出 $C'A$ ，利用勾股定理可得出结论。

【详解】(1) 解：连接 O_2A ，延长 O_2C 交 e_{O_2} 于点 D ，由题意可知 $CD = CP$ ，

$$\because P \text{ 是 } O_2C \text{ 的中点}, \therefore O_2P = CP, \therefore O_2C = \frac{2}{3}O_2D = \frac{2}{3} \times 10 = \frac{20}{3},$$

$$\because O_2C \perp AB, \therefore AB = 2AC, \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{O_2A^2 - O_2C^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}}{3}, \therefore AB = 2AC = 2 \times \frac{10\sqrt{5}}{3} = \frac{20\sqrt{5}}{3};$$



(2) 解：作点 Q 关于弦 AB 的对称点 Q' ，连接 BQ' 并延长与 CA 的延长线相交于 C' ，连接 AQ' ，
 $CQ = 8$ ， $BQ = 12$ ， $CB = CQ + BQ = 8 + 12 = 20$ ，

有折叠性质可知： $\angle CBA = \angle ABC'$ ， $\angle CAB = \angle BAC' = 90^\circ$ ， $AB = AB$ ， $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABC'$ ，

$$\therefore CB = C'B, AC = C'A, \therefore CQ = C'Q' = 8, C'B = CB = 20.$$

\because 四边形 $ACBQ'$ 是圆内接四边形， $\therefore \angle C'BC' + \angle CAQ' = 180^\circ$ ，

$$\angle C'AQ' + \angle CAQ' = 180^\circ, \therefore \angle C'AQ' = \angle C'BC',$$

$$\because \angle C' = \angle C', \therefore \triangle C'AQ' \sim \triangle C'BC, \therefore C'A \cdot C'C = C'B \cdot C'Q',$$

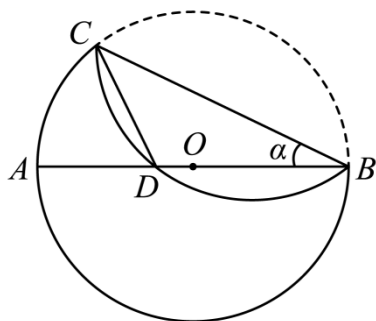
$$\text{即 } C'A \cdot 2C'A = 20 \times 8 = 160. \text{ 则 } C'A^2 = 80,$$

$$\text{又 } \because C'A^2 = C'B^2 - AB^2, \therefore 80 = 400 - AB^2, \therefore AB = 8\sqrt{5}.$$

【点睛】此题是圆的综合题，主要考查了垂径定理，勾股定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，构造出直角三角形是解本题的关键。

习题练模型

1. (2023·广西南宁·统考二模) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上一点, 将劣弧 BC 沿弦 BC 折叠交直径 AB 于点 D , 连接 CD , 若 $\angle ABC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), 则下列式子正确的是 ()

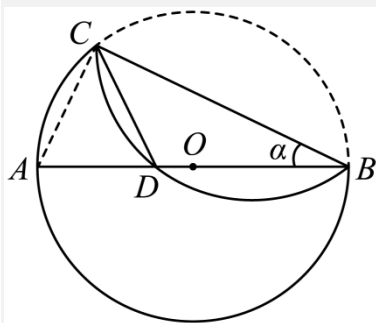


- A. $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$ B. $\sin \alpha = \frac{CD}{AB}$ C. $\cos \alpha = \frac{AD}{BD}$ D. $\cos \alpha = \frac{CD}{BC}$

【答案】 B

【分析】 连 AC , 由 AB 是 $\odot O$ 的直径, 可知 $\angle ACB = 90^\circ$, 由折叠, $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 所在的圆为等圆, 可推得 $AC = CD$, 再利用正弦定义求解即可.

【详解】 解: 连 AC ,



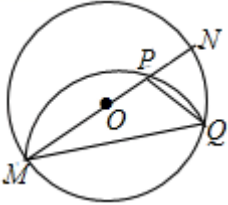
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, 由折叠, $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 所在的圆为等圆,

又 $\because \angle CBD = \angle ABC$, $\therefore \overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圆周角相等, $\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$, $\therefore AC = CD$,

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AB}$, 故选: B.

【点睛】 本题考查圆周角定理和圆心角、弦、弧之间的关系以及正弦、余弦定义，解答关键是通过折叠找到公共的圆周角推出等弦。

2. (2023·江苏扬州·九年级统考期中) 如图，已知 MN 是 $\odot O$ 的直径，点 Q 在 $\odot O$ 上，将劣弧沿弦 MQ 翻折交 MN 于点 P ，连接 PQ ，若 $\angle PMQ=16^\circ$ ，则 $\angle PQM$ 的度数为 ()

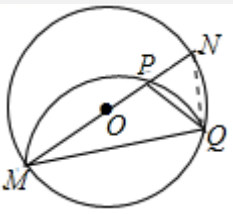


- A. 32° B. 48° C. 58° D. 74°

【答案】 C

【分析】 首先连接 NQ ，由 MN 是直径，可求得 $\angle MQN=90^\circ$ ，则可求得 $\angle MNQ$ 的度数，然后由翻折的性质可得， MQ 所对的圆周角为 $\angle MNQ$ ， MNQ 所对的圆周角为 $\angle MPQ$ ，继而求得答案。

【详解】 解：连接 NQ ，



$\because MN$ 是直径， $\therefore \angle MQN=90^\circ$ ， $\because \angle PMQ=16^\circ$ ，

$\therefore \angle MNQ=90^\circ - \angle PMQ=90^\circ - 16^\circ=74^\circ$ ，

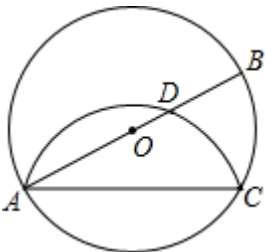
根据翻折的性质， MQ 所对的圆周角为 $\angle MNQ$ ， MNQ 所对的圆周角为 $\angle MPQ$ ，

$\therefore \angle MPQ + \angle MNQ=180^\circ$ ， $\therefore \angle MNQ = \angle QPN=74^\circ$ ，

$\therefore \angle PQM = \angle MNQ - \angle PMQ=74^\circ - 16^\circ=58^\circ$ 。故选：C。

【点睛】 此题考查了圆周角定理以及折叠的性质。注意掌握辅助线的作法，能得到 $\angle MNQ = \angle QPN$ 是解此题的关键。

3. (2023·江苏镇江·九年级统考期中) 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 为圆上一点， $\angle BAC=20^\circ$ ，将劣弧 AC 沿弦 AC 所在的直线翻折，交 AB 于点 D ，则弧 AD 的度数等于 ()



A. 40°

B. 50

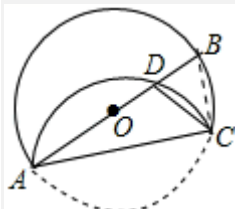
C. 80°

D. 100

【答案】D

【分析】连接 BC ，根据直径所对的圆周角是直角求出 $\angle ACB$ ，根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle B$ ，再根据优弧 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ，得到 $\angle ADC + \angle B = 180^\circ$ ，然后根据 $\angle DCA = \angle CDB - \angle A$ ，计算求得 $\angle DCA$ 的度数，即可求得弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数.

【详解】解：如图，连接 BC ，



$\because AB$ 是直径， $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ， $\because \angle BAC = 20^\circ$ ， $\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

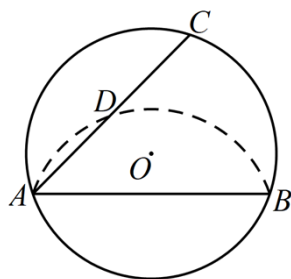
根据翻折的性质， $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角为 $\angle B$ ，优弧 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ$ ， $\therefore \angle B = \angle CDB = 70^\circ$ ， $\therefore \angle DCA = \angle CDB - \angle A = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ ，

\therefore 弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 100° 故选 D.

【点睛】本题考查的是翻折变换，圆周角定理，圆内接四边形的性质. 根据题意作出直径所对的圆周角，构造出直角三角形是解答此题的关键. 难点是理解 $\angle ADC + \angle B = 180^\circ$.

4. (2023·福建龙岩·统考模拟预测) 如图， AB 、 AC 为 $\odot O$ 的两条弦， $AB = 3\sqrt{2}$ ， $AC = 4$ ，将 AB 折叠后刚好过弦 AC 的中点 D ，则 $\odot O$ 的半径为 ()



A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. 5

D. $\sqrt{7}$

【答案】B

【分析】连接 BD ，作 $BE \perp AC$ 于 E ，连接 AO 、 BO 、 DO 、 BC ，过点 O 作 $OF \perp BE$ 于 F ，可由 $\angle DAB = \angle CAB$ 推出 $BD = BC$ ，进而利用勾股定理求得 DE ， BE ，然后证明四边形 $ODEF$ 是矩形，可得 $OF = DE = 1$ ， $EF = OD$ ，再利用勾股定理构建方程求出 EF ，然后可求半径 OA .

【详解】解：如图，连接 BD ，作 $BE \perp AC$ 于 E ，连接 AO 、 BO 、 DO 、 BC ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/558112003111007013>

