课程简介

课程名称　***复变函数***

教　　材　***《复变函数论》***

总 学 时　***51学时***

教师姓名　__王作雷__

对　　象　复变函数（自变量为复数的函数）

主要任务　研究复变数之间的相互依赖关系，具体地就是复数域上的微积分。

主要内容　复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等。

学习方法 复变函数中许多概念、理论、和方法是实变函数在复数域内的推广和开展，它们之间有许多相似之处。但又有不同之处，在学习中要善于比较、区别、特别要注意复数域上特有的那些性质与结果。

背 景

复数是十六世纪人们在解代数方程时引进的。为使负数开方有意义，需要再一次扩大数系，使实数域扩大到复数域。但在十八世纪以前，由于对复数的概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，所以，在历史上长时期人们把复数看作不能接受的“虚数”。

直到十八世纪，J.D’Alembert(1717-1783)与L.Euler (1707-1783)等人逐步说明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念，并且应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题。复数才被人们广泛成认接受，复变函数论才能顺利建立和开展。

复变函数的理论根底是十九世纪奠定的。（1789-1866)和 K.Weierstrass(1815-1897)分别应用积分和级数研究复变函数， (1826-1866)研究复变函数的映照性质。

他们是这一时期的三位代表人物。经过他们的巨大努力，复变函数形成了非常系统的理论，且渗透到了数学的许多分支，同时，它在热力学，流体力学和电学等方面也得到了很多的应用。

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论和天体力学等方面，与数学中其它分支的联系也日益密切。

复变函数

复变函数论多媒体教学课件

第一章　复数与复变函数

第一节 复数

1、复数域

1.1 虚单位:

实例: 方程$x^2=-1$在实数集中无解

为了解方程的需要引入一个新数i,

称为虚数单位

对虚数单位的规定:

(1) $i^2=-1$;

(2) i 可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算

虚数单位的特性:

$i^1 = i;$ $\quad i^2 = -1;$ $\quad i^3 = i \cdot i^2 = -i;$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$ $\quad i^5 = i^4 \cdot i^1 = i;$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1;$ $\quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i;$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1;$ $\quad \cdots\cdots$

一般地，如果n是正整数，则

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

1.2 复数的代数形式:

i-虚单位
满足：$i^2=-1$

对于$\forall\, x, y \in R$, 称$z = x + yi$或$z = x + iy$为复数

实部
记做：Rez=x

虚部
记做：Imz=x

当$x = 0$，$y \neq 0$时，$z = iy$称为纯虚数

当$y = 0$时，$z = x + 0i$，我们把它看作实数.

特别当$x = 0, y = 0$时，$0 = 0 + 0i$.

当$x = 0$，$y \neq 0$时，$z = iy$称为纯虚数

$C = \{z \mid z = x + iy, x, y \in R\}$称为为复数集

例1 实数m取何值时,复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$是(1)实数;(2)纯虚数.

解 令 $x=m^2-3m-4,\quad y=m^2-5m-6,$

(1) 如果复数是实数则$y=0,$

由$m^2-5m-6=0$知$m=6$或$m=-1.$

(2) 如果复数是纯虚数则$x=0$且$y\neq 0,$

由$m^2-3m-4=0$知$m=4$或$m=-1.$

但由$y\neq 0$知$m=-1$应舍去,即只有$m=4.$

两复数相等当且仅当它们的实部和虚局部别相等.

设：$z_1=x_1+i\cdot y_1$

$z_2=x_2+i\cdot y_2$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

复数 z 等于0**当且仅当**它的实部和虚部同时等于0.

说明　两个数如果都是实数,可以比较它们的大小, 如果不全是实数, 就不能比较大小, 也就是说,.

复数不能比较大小!!!

1.3 复数的代数运算

设两复数 $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$

1. 两复数的和: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$

2. 两复数的积: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$

3. 两复数的商: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$

注解:

- 复数的减法运算是加法运算的逆运算
- 复数的除法运算是乘法运算的逆运算
- 复数的四那么运算与实数的四那么运算保持一致

定理:

全体复数关于上述运算做成一个数域.

称为复数域，用C表示.

复数的四那么运算满足以下运算律

①加法交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

②加法结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

③乘法交换律 $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

④乘法结合律 $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

⑤乘法对加法的分配律 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

1.4 复数的Hamilton(代数对〕形式的定义

1835年， Hamilton给出如下定义：

称一个有序数对$z=(x,y)$为一个复数。其中x,y为实数。

要注意，因为复数是“有序数对”，所以一般地有

$(x,y)\neq(y,x)$。

$(x,y)=x+iy$

实部 $\mathrm{Re}z=x$ 虚部： $\mathrm{Im}z=y$

虚单位 $(0,1)=i$ 数零$0=(0,0)=0+0i$

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数 } x=(x,0)=x+i\cdot 0\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数 } z=(0,y)=0+i\cdot y\,(y\neq 0)\\ \text{非纯虚数 } z=(x,y)=x+i\cdot y\ \ (x\neq 0,y\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

复数的四那么运算:

$$(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$$

$$(a,b)\div(c,d)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)\quad ,c^2+d^2\neq 0$$

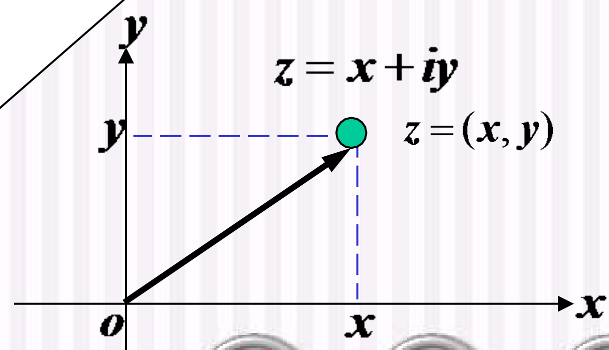
2、复平面

复数$z=x+iy$与有序实数对(x,y)成一一对应. 因此, 一个建立了直角坐标系的平面可以用来表示复数, 通常把横轴叫实轴或x轴, 纵轴叫虚轴或y轴. 这种用来表示复数的平面叫复平面.

复数$z=x+iy$可以用复平面上的点(x,y)表示.

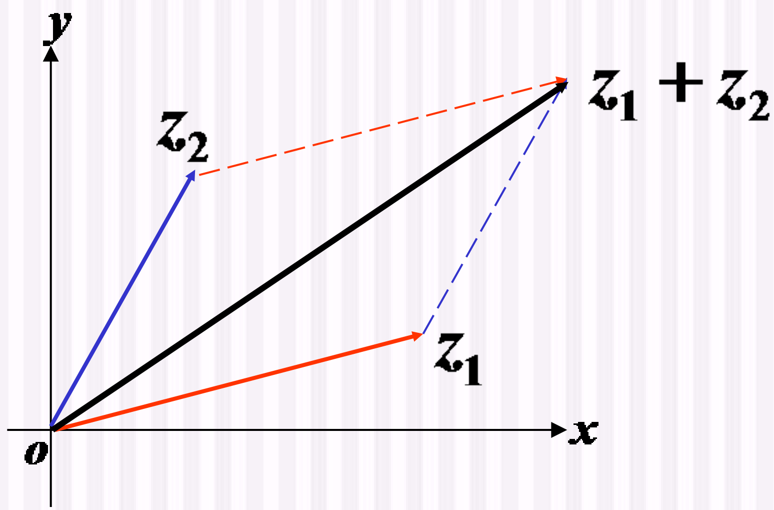
复数的向量表示法

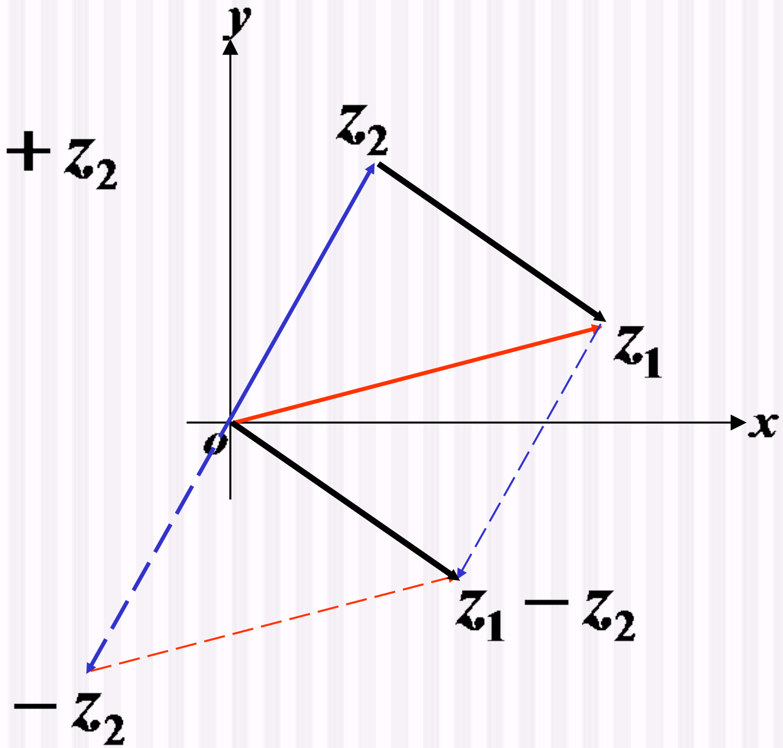
复数$z=x+iy$可以用复平面上的点向量$\overrightarrow{oz}$表示



结论:

两个复数的加减法运算与相应的向量的加减法运算一致.





3. 复数的模与辐角

3.1 模与辐角及辐角主值

复数 $z=x+iy$ 可以等同于平面中的向量，

向量的长度称为复数z的模，定义为：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

向量与正实轴之间的夹角 θ 称为**复数 z的辐角**，定义为：

$$\theta=\mathrm{Arg}\,z=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi \quad (k\in N),$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

我们知道非零复数有无限多个辐角，今后以 $\arg z$ 表示其中的一个特定值。并称符合条件 $-\pi<\arg z\le\pi$ 的一个为**主值**，**或称之为** z 的**主辐角**。

于是，

$$\theta=Arg z=\arg z+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

注意：当z=0时辐角无异议。

当$z \neq 0$时$\arg z$表示z的主辐角,它与反正切$Arc\tan\frac{y}{x}$的主值$\arctan\frac{y}{x}$

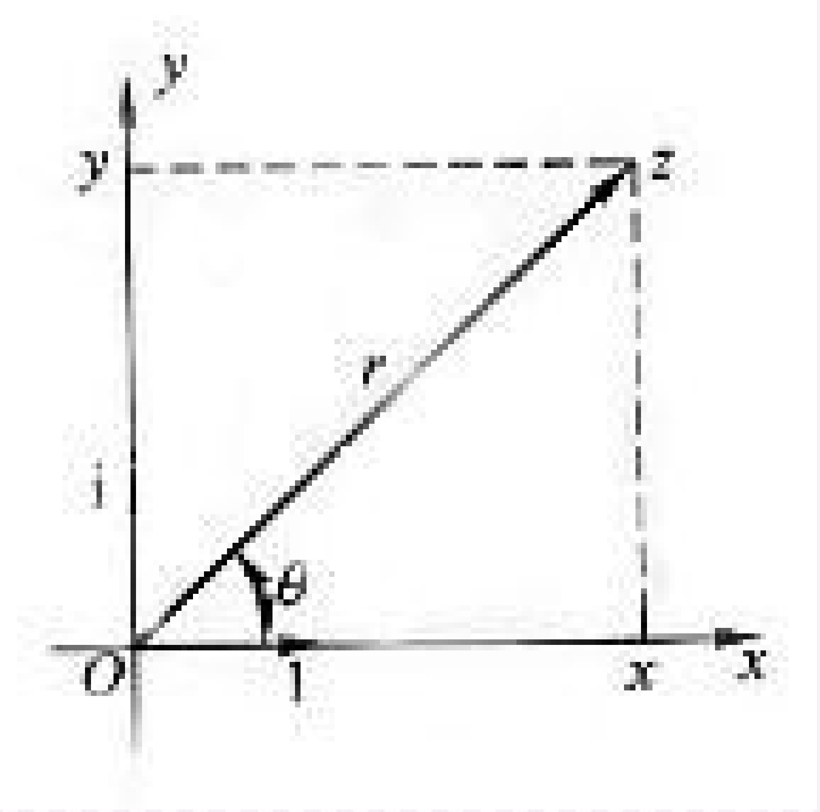
有如下关系（$-\pi < \arg z \le \pi$，$-\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$ ）

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, \text{当} x > 0, y > 0; \\ \frac{\pi}{2}, \text{当} x = 0, y > 0; \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, \text{当} x < 0, y \ge 0; \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, \text{当} x < 0, y < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, \text{当} x = 0, y < 0; \\ \arctan\frac{y}{x}, \text{当} x > 0, y < 0; \end{cases}$$

3.2 复数的三角形式

根据复数z的模与辐角的定义以及复数的向量表示可以推出非零复数的三角形式，即

复数 $z = x + iy$. 的三角表示定义为：



$$z = |z|(\cos Argz + i\sin Argz),$$

$$r = |z|,$$

$$\theta = Argz.$$

3.3 三角表示的乘法

利用复数的三角表示，我们可以更简单的表示复数的乘法与除法，设

$$z_1 = |z_1|(\cos Argz_1 + i\sin Argz_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos Argz_2 + i\sin Argz_2),$$

那么有

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(Argz_1 + Argz_2) + i\sin(Argz_1 + Argz_2)],$$

其中 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$

$$Arg(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2,$$

其中后一个式子应理解为集合相等.

同理，对除法，也有：

$$z_1/z_2=|z_1|/|z_2|[\cos(Argz_1-Argz_2)\ +i\sin(Argz_1-Argz_2)],$$

其中 $$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,$$

$$Arg(z_1/z_2)=Argz_1-Argz_2,$$

其中后一个式子也应理解为集合相等.

3.4 复数的指数形式及运算

艮据复数的模与幅角，我们用复数的三角形式来表示非零复数 z 即有

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

同时我们引进著名的**欧拉**（*Euler*）**公式：**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

那么

$$z = re^{i\theta}$$

上式称为非零复数 z 的指数形式，

由指数性质即可推得复数的乘除有

$$\left.\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}\right\}$$

因此

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0)$$

$$\left.\begin{aligned} Arg z_1 z_2 &= Arg z_1 + Arg z_2 \\ Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= Arg z_1 - Arg z_2 \end{aligned}\right\}$$

这说明：两个复数 z_1, z_2 的乘积（或商），

其模等于这两个复数模的乘积（或商），

其幅角等于这两个复数幅角的和（或差）.

特别 当 $|z_2|=1$ 时，可得

$$z_1 z_2 = re^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

此即说明**单位复数** $(|z_2|=1)$ **乘任何数，**

几何上相当于将此数所对应的向量旋转一个角度.

另外，也可把 $Argz$ 换成 $argz$（某个特定值），若 $argz$ 为主值时，则公式两端允许相差 2π 的整数倍，即有

$$\left.\begin{aligned} Arg(z_1 z_2) &= argz_1 + argz_2 + 2k\pi \\ Arg(\frac{z_1}{z_2}) &= argz_1 - argz_2 + 2k\pi \end{aligned}\right\}$$

此外，当 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$ 时，有

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)$$

当 $r=1$ 时，就得到熟知的**德摩弗** (*DeMoiVre*) **公式**：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

4、复数的乘幂与方根

4.1 复数的乘幂

利用复数的三角表示，我们也可以考虑复数的乘幂：

$$z^n = |z|^n [\cos(nArgz) + i\sin(nArgz)]$$

令$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$，则

$$z^{-n} = |z|^{-n} [\cos(-nArgz) + i\sin(-nArgz)],$$

德摩弗公式　$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$

4.2 复数的方根

进一步，有：

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{1}{n}Argz) + i\sin(\frac{1}{n}Argz)]$$

$$= \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{1}{n}\arg z + \frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{1}{n}\arg z + \frac{2\pi k}{n})],$$

可以看到，$k=0,1,2,\ldots,n-1$ 时，可得 n 个不同的值，

即：*z*有*n*个*n*次方根;

其模相同;

辐角相差一个常数;

均匀分布于一个圆上.

这样，复数的乘幂可以推广到有理数的情形.

例 2　求 $\cos 3\theta$ 及 $\sin 3\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 表示的式子

- 解:

Q $(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$\therefore \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

例3 求下式的所有值：

$$\sqrt[4]{(1+i)}$$

解：由于

$$1+i=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),$$

所以有

$$\sqrt[4]{(1+i)}=\sqrt[8]{2}[\cos\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]$$

$$\sqrt[4]{(1+i)}=\sqrt[8]{2}[\cos(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})]$$

$k=0,1,2,3$ 有四个根.

5、共轭复数:

5.1 共轭复数的定义

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为共轭复数. z的共轭复数记为$\bar{z}$,

若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$.

例4、 计算共轭复数$z = x + yi$与$\bar{z} = x - yi$的积

解: $(x - yi)(x + yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

结论: 两个共轭复数$z, \bar{z}$的积是实数

即: $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

5.2 共轭复数的性质

(1) $|\overline{z}| = |z|$,

(2) $Arg\overline{z} = -Argz$,

(3) $\overline{(\overline{z})} = z$,

(4) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

(5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

(6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$,

(7) $|z|^2 = z\overline{z}$,

(8) $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(9)设$R(a,b,c\text{L})$表示对于复数$a,b,c\text{L}$的任一有理运算,

则 $\overline{\mathrm{R(a,b,cL)}} = R(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\text{L})$