# 云南省剑川县第一中学 2024 届高三上数学期末达标检测试题

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若复数 $\dfrac{2a+2i}{1+i}$（$a\in R$）是纯虚数，则复数 $2a+2i$ 在复平面内对应的点位于（　　）

**A**．第一象限　　**B**．第二象限　　**C**．第三象限　　**D**．第四象限

2．设命题 $p$：函数 $f(x)=e^{x}+e^{-x}$ 在 $R$ 上递增，命题 $q$：在 $\Delta ABC$ 中，$A>B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$，下列为真命题的是（　　）

**A**．$p\wedge q$　　**B**．$p\vee\left(\neg q\right)$　　**C**．$\left(\neg p\right)\wedge q$　　**D**．$\left(\neg p\right)\wedge\left(\neg q\right)$

3．集合 $A=\left\{x\middle|x>2,x\in R\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^{2}-2x-3>0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

**A**．$(3,+\infty)$　　**B**．$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　**C**．$(2,+\infty)$　　**D**．$(2,3)$

4．已知双曲线 $C:\dfrac{x^{2}}{a^{2}}-\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的一条渐近线经过圆 $E:x^{2}+y^{2}+2x-4y=0$ 的圆心，则双曲线 $C$ 的离心率为（　　）

**A**．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　**B**．$\sqrt{5}$　　**C**．$\sqrt{2}$　　**D**．2

5．在 $\triangle ABC$ 中，$AD$ 为 $BC$ 边上的中线，$E$ 为 $AD$ 的中点，且 $|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$，$\angle BAC=120^{\circ}$，则 $|\overrightarrow{EB}|=$（　　）

**A**．$\dfrac{\sqrt{19}}{4}$　　**B**．$\dfrac{\sqrt{11}}{4}$　　**C**．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**D**．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

6．已知命题 ***p***：若 $a>1$，$b>c>1$，则 $\log_{b}a<\log_{c}a$；命题 ***q***：$\exists x_{0}\left(0,+\infty\right)$，使得 $2^{x_{0}}<\log_{3}x_{0}$”，则以下命题为真命题的是（　　）

**A**．$p\wedge q$　　**B**．$p\wedge\left(\neg q\right)$　　**C**．$\left(\neg p\right)\wedge q$　　**D**．$\left(\neg p\right)\wedge\left(\neg q\right)$

7．正 $\Delta ABC$ 的边长为 2，将它沿 $BC$ 边上的高 $AD$ 翻折，使点 $B$ 与点 $C$ 间的距离为 $\sqrt{3}$，此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为（　　）

**A**．$\dfrac{10\pi}{3}$　　**B**．$4\pi$　　**C**．$\dfrac{13\pi}{3}$　　**D**．$7\pi$

8．在钝角 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，$B$ 为钝角，若 $a\cos A=b\sin A$，则 $\sin A+\sin C$ 的最大值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{9}{8}$　　C．1　　D．$\frac{7}{8}$

9．函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 $A$，集合 $B=\left\{x\middle|\log_2(x+1)>1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|1<x\le 2\}$　　B．$\{x|-2\le x\le 2\}$　　C．$\{x|-2<x<3\}$　　D．$\{x|1<x<3\}$

10．已知当 $m$，$n\in[-1，1)$ 时，$\sin\frac{\pi m}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}<n^3-m^3$，则以下判断正确的是（　　）

A．$m>n$　　B．$|m|<|n|$

C．$m<n$　　D．$m$ 与 $n$ 的大小关系不确定

11．已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$,则函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为（　　）

A．$x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z$　　B．$x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

C．$x=\frac{1}{2}k\pi,k\in Z$　　D．$x=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

12．设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，当 $x>0$ 时，$f'(x)\ln x<-\frac{1}{x}f(x)$，则使得 $(x^2-1)f(x)>0$ 成立的 $x$ 的取值范围是（　）

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$P$、$Q$ 是面对角线 $A_1C_1$ 上两个不同的动点.以下四个命题：①存在 $P$、$Q$ 两点，使 $BP\perp DQ$；②存在 $P$、$Q$ 两点，使 $BP$、$DQ$ 与直线 $B_1C$ 都成 $45°$ 的角；③若 $|PQ|=1$，则四面体 $BDPQ$ 的体积一定是定值；④若 $|PQ|=1$，则四面体 $BDPQ$ 在该正方体六个面上的正投影的面积的和为定值.其中为真命题的是____.

14．已知函数 $f(x)=\frac{e\ln x}{2x}$，$g(x)=\frac{2x^2}{x-m}$，若函数 $h(x)=g(f(x))+m$ 有 3 个不同的零点 $x_1$，$x_2$，$x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $2f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ 的取值范围是________.

15．若 $x$、$y$ 满足约束条件 $\begin{cases}y\le 3\\x+y\ge 2\\x-3y\le 6\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

16．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，若顶点到渐近线的距离为 1，则双曲线方程为___________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$的各项均为正数，$S_n$为其前 **n** 项和，对于任意的$n \in N^*$满足关系式$2S_n = 3a_n - 3$.

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式是$b_n = \dfrac{1}{\log_3 a_n \cdot \log_3 a_{n+2}}$，前 **n** 项和为$T_n$，求证：对于任意的正数 **n**，总有$T_n < \dfrac{3}{4}$.

18.（12 分）已知$a > 0$，$b > 0$，函数$f\left(x\right) = \left|2x + a\right| + \left|x - b\right|$的最小值为$\dfrac{1}{2}$.

（1）求证：$a + 2b = 1$；

（2）若$2a + b \geq tab$恒成立，求实数$t$的最大值.

19.（12 分）以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_1$的参数方程是$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5-a}\cos\theta \\ y = 2 + \sqrt{5-a}\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数，常数$a < 5$），曲线$C_2$的极坐标方程是$\rho\sin^2\theta + 4\sin\theta = \rho$.

（1）写出$C_1$的普通方程及$C_2$的直角坐标方程，并指出是什么曲线；

（2）若直线$l$与曲线$C_1$，$C_2$均相切且相切于同一点$P$，求直线$l$的极坐标方程.

20.（12 分）已知抛物线$y^2 = 4x$的准线过椭圆 **C**：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$（**a**＞**b**＞**0**）的左焦点 **F**，且点 **F** 到直线 **l**：$x = \dfrac{a^2}{c}$（**c** 为椭圆焦距的一半）的距离为 **4**.

（1）求椭圆 **C** 的标准方程；

（2）过点 **F** 做直线与椭圆 **C** 交于 **A**，**B** 两点，**P** 是 **AB** 的中点，线段 **AB** 的中垂线交直线 **l** 于点 **Q**.若$|PQ| = 2|AB|$，求直线 **AB** 的方程.

21.（12 分）已知函数$f(x) = \dfrac{ax}{e^x}(a \neq 0)$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）当$a = 1$时，如果方程$f(x) = t$有两个不等实根$x_1, x_2$，求实数 **t** 的取值范围，并证明$x_1 + x_2 > 2$.

22.（10 分）已知在平面直角坐标系$xOy$中，曲线$C$的参数方程为$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$（$\theta$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\theta + \rho\sin\theta - 3 = 0$.

（1）求直线$l$的直角坐标方程；

（2）求曲线$C$上的点到直线$l$距离的最小值和最大值.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

化简复数$\frac{2a+2i}{1+i}$，由它是纯虚数，求得$a$，从而确定$2a+2i$对应的点的坐标．

【详解】

$\frac{2a+2i}{1+i}=\frac{2(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=a+1+(1-a)i$是纯虚数，则$\begin{cases}a+1=0\\1-a\neq 0\end{cases}$，$a=-1$，

$2a+2i=-2+2i$，对应点为$(-2,2)$，在第二象限．

故选：B．

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查复数的概念与几何意义．本题属于基础题．

2、C

【解析】

命题$p$：函数$f(x)=e^x+e^{-x}$在$(-\infty,0)$上单调递减，即可判断出真假．命题$q$：在$\Delta ABC$中，利用余弦函数单调性判断出真假．

【详解】

解：命题$p$：函数$f(x)=e^x+e^{-x}$，所以$f'(x)=e^x-e^{-x}$，当$x<0$时，$f'(x)<0$，即函数在$(-\infty,0)$上单调递减，因此是假命题．

命题$q$：在$\Delta ABC$中，$A,B\in(0,\pi),y=\cos x$在$(0,\pi)$上单调递减，所以$A>B\Leftrightarrow\cos A<\cos B$，是真命题．

则下列命题为真命题的是$(\neg p)\wedge q$．

故选：C．

【点睛】

本题考查了函数的单调性、正弦定理、三角形边角大小关系、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

3、**A**

【解析】

计算 $B=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$，再计算交集得到答案.

【详解】

$B=\left\{x\left|x^2-2x-3>0\right.\right\}=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$， $A=\left\{x\left|x>2,x\in R\right.\right\}$，故 $A\cap B=(3,+\infty)$.

故选：$A$.

【点睛】

本题考查了交集运算，属于简单题.

4、**B**

【解析】

求出圆心，代入渐近线方程，找到 $a$、$b$ 的关系，即可求解.

【详解】

解：$E\left(-1,2\right)$，

$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 一条渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$

$2=-\dfrac{b}{a}\times\left(-1\right)$， $2a=b$

$c^2=a^2+\mathrm{b}^2,c^2=a^2+\left(2a\right)^2,e=\sqrt{5}$

故选：**B**

【点睛】

利用 $a$、$b$ 的关系求双曲线的离心率，是基础题.

5、**A**

【解析】

根据向量的线性运算可得 $\overrightarrow{EB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,利用 $|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2$ 及 $|\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=2$， $\angle BAC=120^\circ$ 计算即可.

【详解】

因为 $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,

所以 $|\overrightarrow{EB}|^2=\overrightarrow{EB}^2=\dfrac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2-2\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$

$=\dfrac{9}{16}\times1^2-\dfrac{3}{8}\times1\times2\times(-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{16}\times2^2$

$=\frac{19}{16}$,

所以$|\overrightarrow{EB}|=\frac{\sqrt{19}}{4}$,

故选：*A*

【点睛】

本题主要考查了向量的线性运算，向量数量积的运算，向量数量积的性质，属于中档题.

6、B

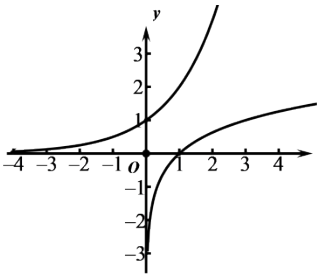
【解析】

先判断命题$p,q$的真假,进而根据复合命题真假的真值表,即可得答案.

【详解】

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$，$\log_c a=\frac{1}{\log_a c}$，因为$a>1$，$b>c>1$，所以$0<\log_a c<\log_a b$，所以$\frac{1}{\log_a c}>\frac{1}{\log_a b}$，即命题$p$为真命题；画出函数$y=2^x$和$y=\log_3 x$图象，知命题$q$为假命题,所以$p\wedge(\neg q)$为真.

故选:B.




【点睛】

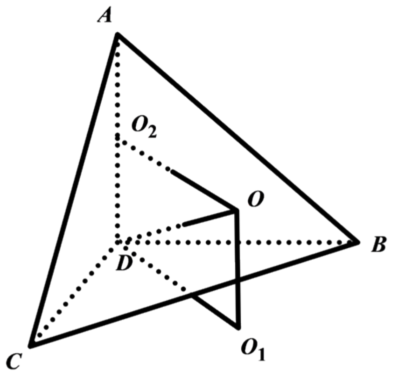
本题考查真假命题的概念,以及真值表的应用,解题的关键是判断出命题$p,q$的真假,难度较易.

7、D

【解析】

如图所示，设$AD$的中点为$O_2$，$\Delta BCD$的外接圆的圆心为$O_1$，四面体$A-BCD$的外接球的球心为$O$，连接$OO_1,OO_2,OD$，利用正弦定理可得$DO_1=1$，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形$OO_2DO_1$为平行四边形，最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积.

【详解】




如图所示，设$AD$的中点为$O_2$，$\Delta BCD$外接圆的圆心为$O_1$，四面体$A-BCD$的外接球的球心为$O$，连接

$OO_1,OO_2,OD$，则$OO_1\perp$平面$BCD$，$OO_2\perp AD$.

因为$CD=BD=1,BC=\sqrt{3}$，故$\cos\angle BDC=\dfrac{2-3}{2\times1\times1}=-\dfrac{1}{2}$，

因为$\angle BDC\in\left(0,\pi\right)$，故$\angle BDC=\dfrac{2\pi}{3}$.

由正弦定理可得$2DO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}=2$，故$DO_1=1$，又因为$AD=\sqrt{3}$，故$DO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$AD\perp DB,AD\perp CD,DB\cap CD=D$，故$AD\perp$平面$BCD$，所以$OO_1//AD$，

因为$AD\perp$平面$BCD$，$DO_1\subset$平面$BCD$，故$AD\perp DO_1$，故$OO_2//DO_1$，

所以四边形$OO_2DO_1$为平行四边形，所以$OO_1=DO_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$OD=\sqrt{\dfrac{3}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，故外接球的半径为$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，外接球的表面积为$4\pi\times\dfrac{7}{4}=7\pi$.

故选：**D.**

【点睛】

本题考查平面图形的折叠以及三棱锥外接球表面积的计算，还考查正弦定理和余弦定理，折叠问题注意翻折前后的变量与不变量，外接球问题注意先确定外接球的球心的位置，然后把半径放置在可解的直角三角形中来计算，本题有一定的难度.

8、**B**

【解析】

首先由正弦定理将边化角可得$\cos A=\sin B$，即可得到$A=B-\dfrac{\pi}{2}$，再求出$B\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，最后根据

$\sin A+\sin C=\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left[\pi-\left(B-\frac{\pi}{2}\right)-B\right]$求出$\sin A+\sin C$的最大值；

【详解】

解：因为$a\cos A=b\sin A$，

所以$\sin A\cos A=\sin B\sin A$

因为$\sin A\neq 0$

所以$\cos A=\sin B$

$\because B>\frac{\pi}{2}$

$\therefore A=B-\frac{\pi}{2}$

$\because\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<B<\pi\\ 0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}0<B-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<B<\pi\\ 0<\pi-\left(B-\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，$\therefore B\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore\cos B\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

$\therefore\sin A+\sin C=\sin\left(B-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left[\pi-\left(B-\frac{\pi}{2}\right)-B\right]$

$=-\cos B-\cos 2B$

$=-2\cos^2 B-\cos B+1$

$=-2\left(\cos B+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$\therefore\cos B=-\frac{1}{4}\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$时$\left(\sin A+\sin C\right)_{\max}=\frac{9}{8}$

故选：$B$

【点睛】

本题考查正弦定理的应用，余弦函数的性质的应用，属于中档题.

9、**A**

【解析】

根据函数定义域得集合$A$，解对数不等式得到集合$B$，然后直接利用交集运算求解.

【详解】

解：由函数$y=\sqrt{4-x^2}$得$4-x^2\geq 0$，解得$-2\leq x\leq 2$，即$A=\left\{x\middle|-2\leq x\leq 2\right\}$；

又$\log_2(x+1)>1=\log_2 2$，解得$x>1$，即$B=\{x|x>1\}$，

则$A\cap B=\{x|1<x\le 2\}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了交集及其运算，考查了函数定义域的求法，是基础题.

10、C

【解析】

由函数的增减性及导数的应用得: 设$f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2},x\in[-1,1]$，求得可得$f(x)$为增函数，又$m$，$n\in[-1$，$1)$时，根据条件得$f(m)<f(n)$，即可得结果.

【详解】

解：设$f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2},x\in[-1,1]$，

则$f'(x)=3x^2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}>0$，

即$f(x)=x^3+\sin\frac{\pi x}{2},x\in[-1,1]$为增函数，

又$m$，$n\in[-1$，$1)$，$\sin\frac{\pi m}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}<n^3-m^3$，

即$\sin\frac{\pi m}{2}+m^3<\sin\frac{\pi n}{2}+n^3$，

所以$f(m)<f(n)$，

所以$m<n$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数的增减性及导数的应用，属中档题.

11、C

【解析】

$f(x)=\cos 2x$，将$2x$看成一个整体，结合$y=\cos x$的对称性即可得到答案.

【详解】

由已知，$f(x)=\cos 2x$，令$2x=k\pi,k\in Z$，得$x=\frac{1}{2}k\pi,k\in Z$.

故选：C.

【点睛】