

重难点突破 07 函数零点问题的综合应用

目录

01 方法技巧与总结2

02 题型归纳总结2

 题型一：判断或讨论函数零点的个数.....2

 题型二：根据零点个数求参数范围.....3

 题型三：证明函数零点的个数.....4

 题型四：证明函数零点的性质.....5

 题型五：最值函数的零点问题.....7

 题型六：同构法妙解零点问题.....8

 题型七：零点差问题.....10

 题型八：分离参数转化为两图像交点解决零点问题.....11

 题型九：零点问题之取点技巧.....13

 题型十：零点与切线问题的综合应用.....14

03 过关测试15

01 方法技巧与总结

1、函数零点问题的常见题型：判断函数是否存在零点或者求零点的个数；根据含参函数零点情况，求参数的值或取值范围。

求解步骤：

第一步：将问题转化为函数的零点问题，进而转化为函数的图像与 x 轴(或直线 $y=k$) 在某区间上的交点问题；

第二步：利用导数研究该函数在此区间上的单调性、极值、端点值等性质，进而画出其图像；

第三步：结合图像判断零点或根据零点分析参数。

2、函数零点的求解与判断方法：

(1)直接求零点：令 $f(x)=0$ ，如果能求出解，则有几个解就有几个零点。

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点。

(3)利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点。

3、求函数的零点个数时，常用的方法有：一、直接根据零点存在定理判断；二、将 $f(x)$ 整理变形成 $f(x)=g(x)-h(x)$ 的形式，通过 $g(x), h(x)$ 两函数图象的交点确定函数的零点个数；三、结合导数，求函数的单调性，从而判断函数零点个数。

4、利用导数研究零点问题：

(1)确定零点的个数问题：可利用数形结合的办法判断交点个数，如果函数较为复杂，可用导数知识确定极值点和单调区间从而确定其大致图像；

(2)方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题，可参变分离，转化为求函数的值域问题处理。可以通过构造函数的方法，把问题转化为研究构造的函数的零点问题；

(3)利用导数研究函数零点或方程根，通常有三种思路：①利用最值或极值研究；②利用数形结合思想研究；③构造辅助函数研究。

02 题型归纳与总结

题型一：判断或讨论函数零点的个数

【典例 1-1】(2024·河南·三模) 函数 $f(x)=e^{\lambda x}-4\sin x+\lambda-2$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y=ax-a-3, a \in \mathbb{R}$ 。

- (1)求 λ 的值;
- (2)求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数.

【典例 1-2】 (2024·河南·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2}{e^x} (a \neq 0, a \in \mathbf{R})$.

- (1)求 $f(x)$ 的极大值;
- (2)若 $a = 1$, 求 $g(x) = f(x) - \cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 2024\pi\right]$ 上的零点个数.

【变式 1-1】 (2024·湖南长沙·三模) 已知函数 $f(x) = xe^x - 1, g(x) = \ln x - mx, m \in \mathbf{R}$.

- (1)求 $f(x)$ 的最小值;
- (2)设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【变式 1-2】 已知 a, b 是实数, 1 和 -1 是函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 的两个极值点

- (1)求 a, b 的值.
- (2)设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x) = f(x) + 2$, 求 $g(x)$ 的极值点.
- (3)设 $h(x) = f(f(x)) - c$, 其中 $c \in [-2, 2]$, 求函数 $y = h(x)$ 的零点个数.

题型二：根据零点个数求参数范围

【典例 2-1】 (2024·广东茂名·一模) 设函数 $f(x) = e^x + a \sin x, x \in [0, +\infty)$.

- (1)当 $a = -1$ 时, $f(x) \geq bx + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 b 的取值范围;
- (2)若 $a > 0, f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上存在零点, 求实数 a 的取值范围.

【典例 2-2】(2024·湖北·模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x - \ln x - a$, $g(x) = e^x - \ln(x+a)$, 其中 a 为整数且 $a \geq 1$. 记 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 若 $f(x)$ 存在两个不同的零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

(1) 求 a 的最小值;

(2) 求证: $g(\ln x_1) = g(\ln x_2) = 0$;

【变式 2-1】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \ln(b+x) + a(x-1)e^{1-x}$, 曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于直线 $2x - y = 0$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求 b 的值;

(2) 当 $b = 0$ 时, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 各内有一个零点, 求 a 的取值范围.

【变式 2-2】(2024·江西吉安·模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - ax - a (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 有 2 个零点, 求 a 的取值范围.

题型三：证明函数零点的个数

【典例 3-1】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = (x-1)^2 e^x - ax$, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -2x + b$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 证明: 函数 $f(x)$ 有两个零点.

【典例 3-2】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \cos x + \ln(1+x)$.

(1) 求证: $f(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的极大值点;

(2) 若 $f(x) \leq ax+1$ 恒成立, 求 a 的值;

(3) 求证: 函数 $g(x) = f(x) - x$ 有两个零点.

【变式 3-1】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2 \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的两个极值点分别为 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{8}{a} - \frac{a}{2}$;

(3) 设 $h(x) = \sin x + \ln x$, 求证: 当 $a \in [1, 2]$ 时, $f(x) - 2 \ln x = xh(x)$ 有且仅有 2 个不同的零点.

(参考数据: $\frac{\pi}{2} - \ln \frac{\pi}{2} \approx 1.119, \pi - \ln \pi \approx 1.997, \frac{3\pi}{2} - \ln \frac{3\pi}{2} \approx 3.162, 2\pi - \ln 2\pi \approx 4.445$)

【变式 3-2】(2024·上海闵行·二模) 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $y = f(x)$ 的表达式为 $f(x) = \sin x - x \cos x$,

其所有的零点按从小到大的顺序组成数列 $\{x_n\}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的值域;

(2) 求证: 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(n\pi, (n+1)\pi)$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) 上有且仅有一个零点;

题型四：证明函数零点的性质

【典例 4-1】(2024·全国·一模) 已知 $f(x) = x^2 - \frac{2 \ln x}{x} - a$

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点 ($x_1 > x_2$), 求证: ① $1 < \frac{1}{x_1 x_2}$; ② $\frac{2}{x_1 x_2} < x_1 + x_2$.

【典例 4-2】(2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - a (x > 0)$, 且 $f(x)$ 有两个相异零点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围.

(2) 证明: $x_1 + x_2 > \frac{2a}{e}$.

【变式 4-1】(2024·江苏扬州·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \ln(mx) - x (m > 0)$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 证明 $x_1 + x_2 > 2$.

【变式 4-2】(2024·山东临沂·二模) 已知函数 $f(x) = \ln(ax) + (a-1)x - e^x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求证: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $f(x_0) < -2$;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个零点, 记较小的零点为 x_1 , t 是关于 x 的方程 $\ln(1+x) + 3 = 2ax_1 + \cos x$ 的根, 证明:
 $e^t + 1 > 2e^{x_1}$.

【变式 4-3】(2024·高三·河南鹤壁·期中) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 (a \in \mathbb{R})$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个极值点, 求 a 的取值范围;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + e^{1-x} - e^x + ax^2 + \cos x$, $x \in (0, 2\pi)$, 证明: $g(x)$ 的所有零点之和大于 2π .

【变式 4-4】(2024·四川眉山·三模) 已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$.

(1)若过点 $(1,0)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 两条切线, 求 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 .

①求 a 的取值范围;

②当 $x_1 > 4x_2$ 时, 证明: $x_1 x_2^2 > 16e^3$.

题型五：最值函数的零点问题

【典例 5-1】 (2024·湖北黄冈·三模) 已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + ax^2$, $g(x) = x \ln \frac{x}{\pi}$.

(1)当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值;

(2)用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数.

【典例 5-2】 (2024·四川南充·三模) 已知函数 $f(x) = x \sin x + \cos x + \frac{1}{2}ax^2$, $g(x) = x \ln \frac{x}{\pi}$.

(1)当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的极值;

(2)用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 讨论函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数.

【变式 5-1】 (2024·四川南充·三模) 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x} + \frac{x^2}{2} - x$, $g(x) = \ln x$ 其中 e 为自然对数的底数.

(1)当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)用 $\max\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最大值, 记函数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} (x > 0)$, 当 $a \geq 0$ 时, 讨论函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数.

【变式 5-2】 (2024·江西九江·二模) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 (a \in \mathbb{R})$, $g(x) = x - 1$.

(1) 若直线 $y = g(x)$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求 a 的值;

(2) 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 讨论函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 的零点个数.

题型六：同构法妙解零点问题

【典例 6-1】 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^{x-1}} + x - \ln(ax) - 2 (a > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在零点, 求实数 a 的取值范围

【典例 6-2】 已知 $f(x) = x \ln x + \frac{a}{2}x^2 + 1$.

(1) 若函数 $g(x) = f(x) + x \cos x - \sin x - x \ln x - 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点, 求实数 a 的取值范围.

(2) 若关于 x 的方程 $xe^{x-a} = f(x) - \frac{a}{2}x^2 + ax - 1$ 有两个不同的实数解, 求 a 的取值范围.

【变式 6-1】 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln(x+1) + \ln a - 1$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点, 求 a 的取值范围.

【变式 6-2】 (2024·上海嘉定·一模) 已知 $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 请严格证明曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有唯一交点;

(3) 对于常数 $a \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, 若直线 $y = a$ 和曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 共有三个不同交点 (x_1, a) 、 (x_2, a) 、 (x_3, a) , 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 求证: x_1 、 x_2 、 x_3 成等比数列.

【变式 6-3】 (2024·四川·三模) 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 和函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 且 $f(x)$ 有最大值为 $\frac{1}{ae}$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 直线 $y = m$ 与两曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 恰好有三个不同的交点, 其横坐标分别为 x_1 , x_2 , x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 证明: $x_1 x_3 = x_2^2$.

【变式 6-4】 (2024·河北邯郸·二模) 已知函数 $f(x) = e^x - mx$, $g(x) = x - m \ln x$.

(1) 是否存在实数 m , 使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调区间相同? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

(2) 已知 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的零点, x_2, x_3 是 $g(x)$ 的零点.

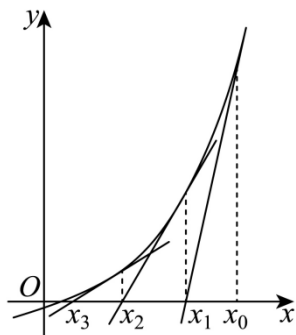
① 证明: $m > e$,

② 证明: $1 < x_1 x_2 x_3 < e^3$.

题型七：零点差问题

【典例 7-1】

(2024·重庆·模拟预测) 牛顿在《流数法》一书中, 给出了代数方程的一种数值解法——牛顿法. 具体做法如下: 如图, 设 r 是 $f(x)=0$ 的根, 首先选取 x_0 作为 r 的初始近似值, 若 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 x 轴相交于点 $(x_1, 0)$, 称 x_1 是 r 的一次近似值; 用 x_1 替代 x_0 重复上面的过程, 得到 x_2 , 称 x_2 是 r 的二次近似值; 一直重复, 可得到一系列数: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. 在一定精确度下, 用四舍五入法取值, 当 $x_{n-1}, x_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 近似值相等时, 该值即作为函数 $f(x)$ 的一个零点 r .



- (1) 若 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 3$, 当 $x_0 = 0$ 时, 求方程 $f(x) = 0$ 的二次近似值 (保留到小数点后两位);
- (2) 牛顿法中蕴含了“以直代曲”的数学思想, 直线常常取为曲线的切线或割线, 求函数 $g(x) = e^x - 3$ 在点 $(2, g(2))$ 处的切线, 并证明: $\ln 3 < 1 + \frac{3}{e^2}$;
- (3) 若 $h(x) = x(1 - \ln x)$, 若关于 x 的方程 $h(x) = a$ 的两个根分别为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明: $x_2 - x_1 > e - ea$.

【典例 7-2】(2024·河南·模拟预测) 已知 $b > 0$, 函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x \ln 2 - y - \ln 2 = 0$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若方程 $f(x) = \frac{1}{e}$ (e 为自然对数的底数) 有两个实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明: $x_2 - x_1 < 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e \ln 2}$

【变式 7-1】(2024·陕西西安·模拟预测) 已知函数 $f(x) = e^x - 1 - ax (a \in \mathbf{R})$.

【变式 7-2】(2024·重庆·模拟预测) 已知函数 $f(x) = a(\ln x + 1) + \frac{1}{x^3} (a > 0)$.

(1) 求证: $1 + x \ln x > 0$;

(2)若 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个相异零点，求证： $|x_2 - x_1| < 1 - \sqrt{\frac{1}{a}}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/565134331210011323>