

2024—2025 学年第二学期高二 3 月阶段性测试

数学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1. 设集合 $A = \{x | 0 < x < 4, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$

B. $\left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点和与焦点共线的顶点分别是双曲线 E 的顶点和焦点，则双曲线 E 的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{2} = 1$

D. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 + a_4$ 恰为 a_5 和 a_6 的等差中项, 则 $\frac{S_8}{S_4} =$ ()

A. 4

B. 5

C. 16

D. 17

4. 已知抛物线 C 的方程为 $x^2 + 8y = 0$, 则抛物线的焦点坐标为 ()

A. $(-2, 0)$

B. $(-4, 0)$

C. $(0, -2)$

D. $(0, -4)$

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{10} =$ ()

A. 5

B. 6

C. 9

D. 10

6. 过点 $A(0, 1)$ 且与曲线 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ 相切的直线方程是 ()

A. $y = 5x + 1$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = x + 1$

D. $y = -2x + 1$

7. 已知 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0, \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AF_1} (\lambda \neq 0), 5|AF_2| = 12|AB|$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{5}$

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n > 0$, 且 $na_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - (n+1)a_n^2 = 0$, 则 a_{20} 的值为 ()

- A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列函数在定义域上为增函数的有 ()

- A. $f(x) = 2x^4$ B. $f(x) = xe^x$ C. $f(x) = x - \cos x$ D. $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 下列说法正确的是 ()

A. 若 $b^2 = ac$, 则 a, b, c 成等比数列

B. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列

C. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列

D. 若 $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+1} = a_n + 2a_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为等比数列

11. 已知 M, N 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上的两点, 焦点为 F , 抛物线上一点 $P(1, t)$ 到焦点 F 的距离为 2, 下列说法正确的是 ()

A. $p = 2$

B. 若直线 MN 的方程为 $y = 2x - 2$, 则 $|MN| = 4$

C. 若 $\triangle MOF$ 的外接圆与抛物线 C 的准线相切, 则该圆的半径为 $\frac{3}{2}$ (O 为坐标原点)

D. 若 $\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{FN}, M$ 在 x 轴上方, 则直线 MN 的斜率为 $2\sqrt{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, 公差 $d \neq 0$, S_n 为其前 n 项和, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $S_8 =$

_____.

13. 已知函数 $f(x) = kx^3 - 3(k+1)x^2 - 2k^2 + 4$, 若 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 4)$, 则实数 $k =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = (x-a)\ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在单调递减区间, 则 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x}{x} + b$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $f(x)$ 图象上的点到直线 $2x - y + 3 = 0$ 的距离的最小值.

16. 在圆 $x^2 + y^2 = 8$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线段 PD , D 为垂足, 当点 P 在圆上运动时, 记线段 PD 的中点 M 的轨迹为 C .

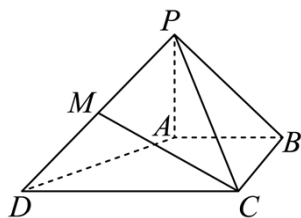
(1) 求 C 的方程.

(2) 直线 $l: y = x + m$ 与 C 交于 M, N 两点 (点 M, N 不重合).

①求 m 的取值范围;

②若 $m=1$, 求 $|MN|$.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AB \perp BC$, $|CD| = 2|AB| = 2|AP| = 2, |BC| = \sqrt{3}, |PC| = \sqrt{5}$.



(1) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求平面 PAD 与平面 PBC 所成角的余弦值;

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+2} = 4(a_{n+1} - a_n)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n < 1$;

(3) 令 $c_n = \frac{2n-1}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点和上顶点分别为 P, Q 且 $PF_1 = 3$. 直线 l 经过 F_1 交 C 于 A, B (A 在 x 轴上方) 两点, 当 l 垂直于 x 轴时, 直线 OA 的斜率是直线 PQ 斜率的 $\sqrt{3}$ 倍.

(1) 求 C 的方程;

(2) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值;

(3) 若直线 PA, PB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 问 $\triangle MF_1F_2$ 的外接圆是否经过点 N , 请给出你的判断并说明理由?

2024—2025 学年第二学期高二 3 月阶段性测试

数学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求.

1. 设集合 $A = \{x | 0 < x < 4, x \in N\}$, $B = \left\{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\left\{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$

B. $\left\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$

C. $\{1, 2, 3\}$

D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$

【答案】A

【解析】

【分析】用列举法表示集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 结合并集的定义即得解

【详解】由题意, $A = \{x | 0 < x < 4, x \in N\} = \{1, 2, 3\}$

由并集的定义, $A \cup B = \left\{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$

故选: A

2. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点和与焦点共线的顶点分别是双曲线 E 的顶点和焦点, 则双曲线 E 的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{2} = 1$

D. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据条件得出双曲线 E 的顶点和焦点坐标即可.

【详解】已知椭圆 C 的焦点坐标为 $(0, \pm\sqrt{3})$, 上下顶点坐标为 $(0, \pm\sqrt{5})$,

则双曲线 E 的顶点为 $(0, \pm\sqrt{3})$, 焦点为 $(0, \pm\sqrt{5})$,

则双曲线 E 的标准方程为 $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$

故选: D

3. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_3 + a_4$ 恰为 a_5 和 a_6 的等差中项, 则 $\frac{S_8}{S_4} = (\quad)$

A. 4

B. 5

C. 16

D. 17

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $a_3 + a_4$ 恰为 a_5 和 a_6 的等差中项, 由 $a_5 + a_6 = 2(a_3 + a_4)$, 求得公比, 再利用等比数列前 n 项和公式求解.

【详解】因为 $a_3 + a_4$ 恰为 a_5 和 a_6 的等差中项,

所以 $a_5 + a_6 = 2(a_3 + a_4)$, 则 $q^2 = 2$,

$$\text{所以 } \frac{S_8}{S_4} = \frac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 5,$$

故选: B

4. 已知抛物线 C 的方程为 $x^2 + 8y = 0$, 则抛物线的焦点坐标为 $(\quad)$

A. $(-2, 0)$

B. $(-4, 0)$

C. $(0, -2)$

D. $(0, -4)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线的标准方程可得出该抛物线的焦点坐标.

【详解】抛物线 C 的标准方程为 $x^2 = -8y$, 则 $2p = 8$, 可得 $p = 4$, $\frac{p}{2} = 2$,

故抛物线 C 的焦点坐标为 $(0, -2)$.

故选: C.

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$, 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{10} = (\quad)$

A. 5

B. 6

C. 9

D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】根据题中递推公式逐项计算出 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 a_6 、 a_7 、 a_8 、 a_9 、 a_{10} 的值，即可求得 S_{10} 的值.

【详解】在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $a_{n+1}-a_n=\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$ ，则 $a_2-a_1=\cos\pi=-1$ ，可得 $a_2=0$ ，

$$a_3-a_2=\cos\frac{3\pi}{2}=0，可得a_3=0，a_4-a_3=\cos2\pi=1，可得a_4=1，$$

$$a_5-a_4=\cos\frac{5\pi}{2}=0，可得a_5=1，a_6-a_5=\cos3\pi=-1，可得a_6=0，$$

$$a_7-a_6=\cos\frac{7\pi}{2}=0，可得a_7=0，a_8-a_7=\cos4\pi=1，可得a_8=1，$$

$$a_9-a_8=\cos\frac{9\pi}{2}=0，可得a_9=1，a_{10}-a_9=\cos5\pi=-1，可得a_{10}=0，$$

因此， $S_{10}=1+0+0+1+1+0+0+1+1+0=5$.

故选：A.

6. 过点 $A(0,1)$ 且与曲线 $f(x)=x^3+2x-1$ 相切的直线方程是（ ）

A. $y=5x+1$

B. $y=2x+1$

C. $y=x+1$

D. $y=-2x+1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据导数几何意义以及斜率公式，计算可得切点坐标，即可求得切线方程.

【详解】 $f'(x)=3x^2+2$ ，点 A 不在曲线上，

$$\text{设切点为}(x_0, x_0^3+2x_0-1), \text{ 则 } f'(x_0)=3x_0^2+2=\frac{x_0^3+2x_0-1-1}{x_0},$$

$$\text{解得: } x_0=-1, \text{ 得切点 } (-1, -4), \text{ 则 } k=f'(-1)=5$$

$$\text{切线方程为: } y=5x+1,$$

故选：A.

7. 已知 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点， F_1, F_2 分别为 C 的左、右焦点，

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0, \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AF_1} (\lambda \neq 0), 5|AF_2| = 12|AB|, \text{ 则 } C \text{ 的离心率为 ()}$$

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{\sqrt{17}}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】由已知，可得 $AB \perp AF_2$ ， A, F_1, B 三点共线，设 $|AB| = 5m, |AF_2| = 12m$ ，可得 $|BF_2| = 13m$ ，由 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$ ，可得 $m = \frac{2}{15}a$ ，在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，利用勾股定理有 $\left(\frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{8}{5}a\right)^2 = 4c^2$ ，化简整理，即可求出离心率.

【详解】由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$ 可知，

$AB \perp AF_2$ ，由 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AF_1}$ ($\lambda \neq 0$) 得， A, F_1, B 三点共线.

又 $5|AF_2| = 12|AB|$ ，设 $|AB| = 5m, |AF_2| = 12m$ ，

连接 BF_2 ，则 $|BF_2| = \sqrt{(5m)^2 + (12m)^2} = 13m$ ，

由椭圆的定义可知 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$ ，

则 $5m + 12m + 13m = 4a$ ，解得 $m = \frac{2}{15}a$ ，

所以 $|AF_2| = 12m = \frac{8}{5}a$ ，再根据椭圆的定义可知， $|AF_1| = 2a - |AF_2| = \frac{2}{5}a$ ，

则在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中， $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，即 $\left(\frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{8}{5}a\right)^2 = 4c^2$ ，

解得 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：由 $5|AF_2| = 12|AB|$ ，设 $|AB| = 5m, |AF_2| = 12m$ ，得到 $|BF_2| = 13m$ ，由 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$ ，可得 $m = \frac{2}{15}a$ ，再在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中，利用勾股定理即可.

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1, a_n > 0$ ，且 $na_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - (n+1)a_n^2 = 0$ ，则 a_{20} 的值为 ()

A. 18

B. 19

C. 20

D. 21

【答案】C

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/566014003020011103>