

湖南省沅江市第三中学 2024 年高考数学一模试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

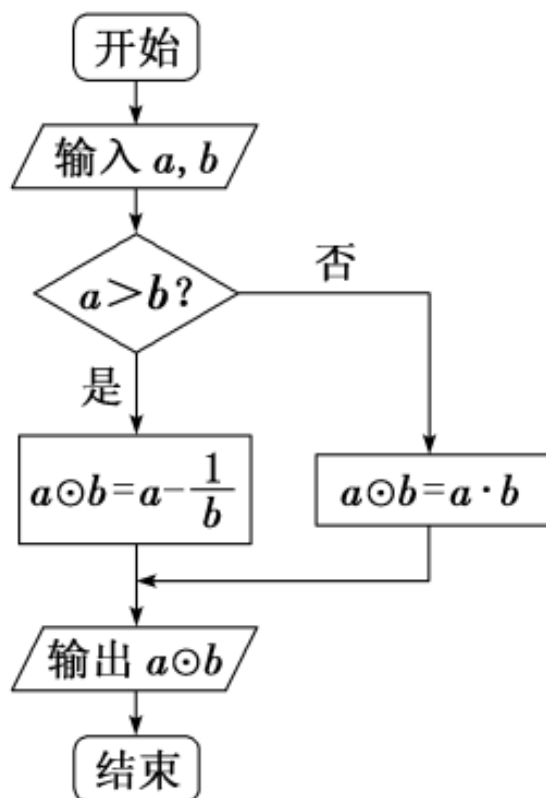
1. 已知集合 $M = \{y | -1 < y < 3\}$ ， $N = \{x | x(2x - 7) \leq 0\}$ ，则 $M \cup N =$ ()

- A. $[0, 3)$ B. $\left(0, \frac{7}{2}\right]$ C. $\left(-1, \frac{7}{2}\right]$ D. $\emptyset$

2. 点 P 为棱长是 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 球面上的动点，点 M 为 B_1C_1 的中点，若满足 $DP \perp BM$ ，则动点 P 的轨迹的长度为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}\pi}{5}$

3. 执行如图所示的程序框图，若输入 $a = \ln 10$ ， $b = \lg e$ ，则输出的值为 ()



- A. 0 B. 1 C. $2\lg e$ D. $2\lg 10$

4. 设递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_4 = \frac{40}{3}$ ， $3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0$ ，则 $a_4 =$ ()

- A. 9 B. 27 C. 81 D. $\frac{8}{3}$

5. 若 $z = 1 + (1-a)i$ ($a \in R$)， $|z| = \sqrt{2}$ ，则 $a =$ ()

- A. 0 或 2 B. 0 C. 1 或 2 D. 1

6. 如图，这是某校高三年级甲、乙两班在上学期的 5 次数学测试的班级平均分的茎叶图，则下列说法不正确的是 ()

甲班					乙班	
	7			9	5	8
7	3	1		10	1	3
	2			11	3	

- A. 甲班的数学成绩平均分的平均水平高于乙班
B. 甲班的数学成绩的平均分比乙班稳定
C. 甲班的数学成绩平均分的中位数高于乙班
D. 甲、乙两班这 5 次数学测试的总平均分是 103

7. 已知不重合的平面 α, β, γ 和直线 l ，则“ $\alpha // \beta$ ”的充分不必要条件是 ()

- A. α 内有无数条直线与 β 平行 B. $l \perp \alpha$ 且 $l \perp \beta$
C. $\alpha \perp \gamma$ 且 $\gamma \perp \beta$ D. α 内的任何直线都与 β 平行

8. 已知实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$ ，则 $|x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7|$ 的最小值等于 ()

- A. $6\sqrt{2} - 5$ B. $6\sqrt{2} - 7$ C. $\sqrt{6} - \sqrt{3}$ D. $9 - 6\sqrt{2}$

9. 已知 $a = \log_3 \sqrt{2}$ ， $b = \ln 3$ ， $c = 2^{-0.99}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 2$ ，将这个数列中的项摆放成如图所示的数阵. 记 b_n 为数阵从左至右的 n 列，

从上到下的 n 行共 n^2 个数的和，则数列 $\left\{\frac{n}{b_n}\right\}$ 的前 2020 项和为 ()

a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n+1}
a_3	a_4	a_5	$\cdots$	a_{n+2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	a_{n+1}	a_{n+2}	$\cdots$	a_{2n-1}

- A. $\frac{1011}{2020}$ B. $\frac{2019}{2020}$ C. $\frac{2020}{2021}$ D. $\frac{1010}{2021}$

11. 本次模拟考试结束后, 班级要排一张语文、数学、英语、物理、化学、生物六科试卷讲评顺序表, 若化学排在生物前面, 数学与物理不相邻且都不排在最后, 则不同的排表方法共有 ()

- A. 72 种 B. 144 种 C. 288 种 D. 360 种

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$, 则 λ 的值是 ()

- A. 4 B. 2 C. -2 D. -4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = 2^n$, 则 $a_n =$ _____.

14. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图像, 则函数 $y = f(x) - g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 _____.

15. 随着国力的发展, 人们的生活水平越来越好, 我国的人均身高较新中国成立初期有大幅提高. 为了掌握学生的体质与健康现状, 合理制定学校体育卫生工作发展规划, 某市进行了一次全市高中男生身高统计调查, 数据显示全市 30000 名高中男生的身高 ξ (单位: cm) 服从正态分布 $N(172, \sigma^2)$, 且 $P(172 < \xi \leq 180) = 0.4$, 那么该市身高高于 $180cm$ 的高中男生人数大约为 _____.

16. 若函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像与直线 $y = m$ 的三个相邻交点的横坐标分别是 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$, 则实数 ω 的值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知中心在原点 O 的椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, C 与 y 轴正半轴交点为 A , 且 $\angle AF_1O = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过点 A 作斜率为 k_1 、 k_2 ($k_1 k_2 \neq 0$) 的两条直线分别交 C 于异于点 A 的两点 M 、 N . 证明: 当 $k_2 = \frac{k_1}{k_1 - 1}$ 时, 直线 MN 过定点.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

19. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $2a - c = 2b \cos C$.

(1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值;

(2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围.

20. (12分) 已知直线 $x + y = 1$ 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 且交椭圆于 A, B 两点, 线段 AB 的中点是

$$M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

(1) 求椭圆的方程;

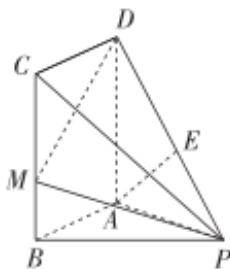
(2) 过原点的直线 l 与线段 AB 相交(不含端点)且交椭圆于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

21. (12分) 已知首项为2的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{2na_n + 2^{n+1}}{n+1}$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{na_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列.

(2) 令 $b_n = a_n + n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

22. (10分) 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为矩形, $AB = 3, AP = 4$, E 为 PD 的中点, $AE \perp PC$.



(1) 求线段 AD 的长.

(2) 若 M 为线段 BC 上一点, 且 $BM = 1$, 求二面角 $M-PD-A$ 的余弦值.

参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

先化简 $N = \{x | x(2x-7) \leq 0\} = \left\{x | 0 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ，再求 $M \cup N$ 。

【详解】

因为 $N = \{x | x(2x-7) \leq 0\} = \left\{x | 0 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$ ，

又因为 $M = \{y | -1 < y < 3\}$ ，

所以 $M \cup N = \left(-1, \frac{7}{2}\right]$ ，

故选：C。

【点睛】

本题主要考查一元二次不等式的解法、集合的运算，还考查了运算求解能力，属于基础题。

2、C

【解析】

设 B_1B 的中点为 H ，利用正方形和正方体的性质，结合线面垂直的判定定理可以证明出 $BM \perp$ 平面 DCH ，这样可以确定动点 P 的轨迹，最后求出动点 P 的轨迹的长度。

【详解】

设 B_1B 的中点为 H ，连接 CH, DH ，因此有 $CH \perp BM$ ，而 $DC \perp MB$ ，而 $DC, CH \subset$ 平面 CDH ，

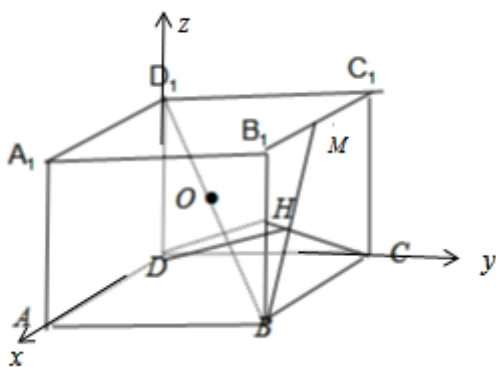
$DC \cap CH = C$ ，因此有 $BM \perp$ 平面 DCH ，所以动点 P 的轨迹平面 DCH 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的交线。正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以内切球 O 的半径为 $R = 1$ ，建立如下图所示的以 D 为坐标原点的空间直角坐标系：

因此有 $O(1,1,1), C(0,2,0), H(2,2,1)$ ，设平面 DCH 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，所以有

$$\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{DC} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, -2)，因此 O 到平面 DCH 的距离为 d = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{OD}|}{|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}，$$

所以截面圆的半径为： $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，因此动点 P 的轨迹的长度为 $2\pi r = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$ 。

故选：C



【点睛】

本题考查了线面垂直的判定定理的应用，考查了立体几何中轨迹问题，考查了球截面的性质，考查了空间想象能力和数学运算能力.

3、A

【解析】

根据输入的值大小关系，代入程序框图即可求解.

【详解】

输入 $a = \ln 10$ ， $b = \lg e$ ，

因为 $\ln 10 > 1 > \lg e$ ，所以由程序框图知，

输出的值为 $a - \frac{1}{b} = \ln 10 - \frac{1}{\lg e} = \ln 10 - \ln 10 = 0$.

故选：A

【点睛】

本题考查了对数式大小比较，条件程序框图的简单应用，属于基础题.

4、A

【解析】

根据两个已知条件求出数列的公比和首项，即得 a_4 的值.

【详解】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由 $3a_4 - 10a_3 + 3a_2 = 0$ ，得 $3q^2 - 10q + 3 = 0$ ，解得 $q = 3$ 或 $q = \frac{1}{3}$.

因为 $S_4 > 0$ 且数列 $\{a_n\}$ 递增，所以 $q = 3$.

$$\text{又 } S_4 = \frac{a_1(1-3^4)}{1-3} = \frac{40}{3}, \text{ 解得 } a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } a_4 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查等比数列的通项和求和公式，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5、A

【解析】

利用复数的模的运算列方程，解方程求得 a 的值.

【详解】

由于 $z = 1 + (1-a)i$ ($a \in R$), $|z| = \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{1^2 + (1-a)^2} = \sqrt{2}$, 解得 $a = 0$ 或 $a = 2$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查复数模的运算，属于基础题.

6、D

【解析】

计算两班的平均值，中位数，方差得到 ABC 正确，两班人数不知道，所以两班的总平均分无法计算， D 错误，得到答案.

【详解】

由题意可得甲班的平均分是 104，中位数是 103，方差是 26.4；

乙班的平均分是 102，中位数是 101，方差是 37.6，则 A, B, C 正确.

因为甲、乙两班的人数不知道，所以两班的总平均分无法计算，故 D 错误.

故选：D.

【点睛】

本题考查了茎叶图，平均值，中位数，方差，意在考查学生的计算能力和应用能力.

7、B

【解析】

根据充分不必要条件和直线和平面，平面和平面的位置关系，依次判断每个选项得到答案.

【详解】

A. α 内有无数条直线与 β 平行，则 α, β 相交或 $\alpha // \beta$ ，排除；

B. $l \perp \alpha$ 且 $l \perp \beta$, 故 $\alpha // \beta$, 当 $\alpha // \beta$, 不能得到 $l \perp \alpha$ 且 $l \perp \beta$, 满足;

C. $\alpha \perp \gamma$ 且 $\gamma \perp \beta$, $\alpha // \beta$, 则 α, β 相交或 $\alpha // \beta$, 排除;

D. α 内的任何直线都与 β 平行, 故 $\alpha // \beta$, 若 $\alpha // \beta$, 则 α 内的任何直线都与 β 平行, 充要条件, 排除.

故选: B.

【点睛】

本题考查了充分不必要条件和直线和平面, 平面和平面, 意在考查学生的综合应用能力.

8、D

【解析】

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sin \theta$, 去绝对值, 根据余弦函数的性质即可求出.

【详解】

因为实数 x, y 满足 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

设 $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \therefore |x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7| &= |2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2| + |2\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 7| \\ &= |-\sin^2 \theta| + |\cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8|, \end{aligned}$$

$$|\cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8| = (\cos \theta - 3\sqrt{2})^2 - 10 > 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore |x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7| = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 6\sqrt{2} \cos \theta + 8 = 9 - 6\sqrt{2} \cos \theta \geq 9 - 6\sqrt{2},$$

故则 $|x^2 + y^2 - 2| + |x^2 + y^2 - 6x + 7|$ 的最小值等于 $9 - 6\sqrt{2}$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了椭圆的参数方程、三角函数的图象和性质, 考查了运算能力和转化能力, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

9、A

【解析】

根据指数函数与对数函数的单调性, 借助特殊值即可比较大小.

【详解】

$$\text{因为 } \log_3 \sqrt{2} < \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2},$$

所以 $a < \frac{1}{2}$.

因为 $3 > e$,

所以 $b = \ln 3 > \ln e = 1$,

因为 $0 > -0.99 > -1$, $y = 2^x$ 为增函数,

所以 $\frac{1}{2} < c = 2^{-0.99} < 1$

所以 $b > c > a$,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了指数函数、对数函数的单调性, 利用单调性比较大小, 属于中档题.

10、D

【解析】

由题意, 设每一行的和为 c_i , 可得 $c_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{n+1-i} = n(n+2i+1)$, 继而可求解

$b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = 2n^2(n+1)$, 表示 $\frac{n}{b_n} = \frac{1}{2n(n+1)}$, 裂项相消即可求解.

【详解】

由题意, 设每一行的和为 c_i

故 $c_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{n+1-i} = \frac{(a_i + a_{n+1-i})n}{2} = n(n+2i+1)$

因此: $b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = n[(n+3) + (n+5) + \dots + (n+2n+1)] = 2n^2(n+1)$

$\frac{n}{b_n} = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

故 $S_{2020} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2021} \right) = \frac{1010}{2021}$

故选: D

【点睛】

本题考查了等差数列型数阵的求和, 考查了学生综合分析, 转化划归, 数学运算的能力, 属于中档题.

11、B

【解析】

利用分步计数原理结合排列求解即可

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/566015031035010122>