

广东省实验中学 2023-2024 高三数学

大湾区冲刺卷四全解全析

数学（新高考 I 卷）

（考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分）

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：**高考全部内容**
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1.（本题 5 分）已知复数 z 满足 $|z - (1 + 2i)| = 0$ ，其中 i 是虚数单位，则 $|z| = (\quad)$

- A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. 1 D. 2

【答案】B

【分析】求出复数 z ，利用复数的模长公式可求得 $|z|$ 的值。

【详解】因为 $|z - (1 + 2i)| = 0$ ，则 $z = 1 + 2i$ ，故 $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 。

故选：B.

2.（本题 5 分）已知集合 $A = \{x | 0 \leq \log_3 x \leq 2\}$ ， $B = \{x | |x - 3| \leq 3\}$ ，则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 9]$ C. $[1, 6]$ D. $[6, 9]$

【答案】C

【分析】首先解对数不等式和绝对值不等式求出集合 A 、 B ，再根据交集的定义计算可得。

【详解】由 $0 \leq \log_3 x \leq 2$ ，即 $\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 9$ ，所以 $1 \leq x \leq 9$ ，

所以 $A = \{x | 0 \leq \log_3 x \leq 2\} = \{x | 1 \leq x \leq 9\}$ ，

由 $|x-3| \leq 3$ ，即 $-3 \leq x-3 \leq 3$ ，解得 $0 \leq x \leq 6$ ，

所以 $B = \{x \mid |x-3| \leq 3\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}$ 。

故选：C

3. (本题 5 分) 已知 $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (2, 2)$ ，则向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的投影向量为 ()

- A. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ C. $(1, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

【答案】D

【分析】利用求投影向量的公式进行求解即可。

【详解】向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

故选：D.

4. (本题 5 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，设 α, β 都是锐角，若 $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ 的始边都与 x 轴的非负半轴重合，终边分别与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，且满足 $y_2 = y_1 x_3$ ，则当 β 最大时， $\tan 2\beta$ 的值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

【答案】B

【分析】根据三角函数的定义，由 $y_2 = y_1 x_3$ ，有 $\sin \beta = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$ ，利用两角差的正弦公式化简得 $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$ ，由两角差的正切公式结合基本不等式求 $\tan \beta$ 的最大值，再由倍角公式求 $\tan 2\beta$ 的值。

【详解】由 $y_2 = y_1 x_3$ ，有 $\sin \beta = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$ ，即 $\sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$ ，则有 $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$ ，得 $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$ ，

$\tan \beta = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha] = \frac{\tan \alpha}{1 + 2 \tan^2 \alpha} \leq \frac{\tan \alpha}{2\sqrt{2} \tan \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，当且仅当 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，

β 是锐角，所以当 β 最大时， $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，

则 $\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ 。

故选：B.

5. (本题 5 分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3, a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+2n+2$, 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有

$\frac{\lambda n 9^n}{a_n} - 8^n \geq 0$ 恒成立, 则实数 λ 的最小值为 ()

- A. $\frac{8}{3}$ B. $15 \times \left(\frac{8}{9}\right)^7$ C. $17 \times \left(\frac{8}{9}\right)^8$ D. $19 \times \left(\frac{8}{9}\right)^9$

【答案】 C

【分析】 由已知条件可得 $\frac{a_n}{n} = 2n+1$, 再由 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{\lambda n 9^n}{a_n} - 8^n \geq 0$ 恒成立, 可得对

$\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\lambda \geq \left(\frac{8}{9}\right)^n \times (2n+1)$ 恒成立, 令 $b_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n \times (2n+1)$, 求出数列 $\{b_n\}$ 的最大项即可得答案.

【详解】 解: 因为 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n + 2n + 2 = \frac{n+1}{n}a_n + 2(n+1)$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 2$,

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 首项为 3, 公差为 2,

所以 $\frac{a_n}{n} = 3 + 2(n-1) = 2n+1$,

$a_n = 2n^2 + n$,

又因为 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\frac{\lambda n 9^n}{a_n} - 8^n \geq 0$ 恒成立,

所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $\lambda \geq \left(\frac{8}{9}\right)^n \times \frac{a_n}{n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n \times (2n+1)$ 恒成立,

令 $b_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n \times (2n+1)$,

则 $b_{n+1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} \times (2n+3)$,

所以 $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} \times (2n+3) - \left(\frac{8}{9}\right)^n \times (2n+1) = \left(\frac{8}{9}\right)^n \times \frac{15-2n}{9}$,

所以当 $n \leq 7 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $b_{n+1} - b_n > 0$, $b_{n+1} > b_n$;

当 $n \geq 8 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $b_{n+1} - b_n < 0$, $b_{n+1} < b_n$;

所以在数列 $\{b_n\}$ 中, 第 8 项最大, 且 $b_8 = \left(\frac{8}{9}\right)^8 \times 17$,

所以 $\lambda \geq \left(\frac{8}{9}\right)^8 \times 17$,

故 λ 的最小值为 $\left(\frac{8}{9}\right)^8 \times 17$.

故选: C.

【点睛】 关键点睛：本题的关键点有 2 个：一是将已知条件变形得数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是等差数列，首项为 3，公差为 2；二是判断出在数列 $\{b_n\}$ 中，第 8 项最大。

6. (本题 5 分) 生物学上, J 型增长是指在理想状态下, 物种迅速爆发的一种增长方式, 其表达式为 $N = N_0 \lambda^t$, 其中 N_0 为初始个体数, N 为最终个体数. 若某种群在该模型下, 个体数由 100 增长至 120 消耗了 10 天, 则个体数由 120 增长至 160 消耗的时间大约为 () (参考数据: $\lg 2 = 0.3$, $\lg 3 = 0.48$)

- A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

【答案】 B

【分析】 将已知数据代入函数模型, 利用对数的运算性质求出即可.

【详解】 由题意可得, $120 = 100\lambda^{10}$,

$$\text{所以 } \lambda^{10} = \frac{6}{5}, \text{ 即 } \lambda = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{10}},$$

$$\text{所以 } N = N_0 \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t}{10}},$$

$$\text{当 } N_0 = 120, N = 160 \text{ 时, } 160 = 120 \times \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t}{10}},$$

$$\text{即 } \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } \frac{t}{10} = \log_{\frac{6}{5}} \frac{4}{3} = \frac{\lg \frac{4}{3}}{\lg \frac{6}{5}} = \frac{\lg 4 - \lg 3}{\lg 6 - \lg 5} = \frac{2\lg 2 - \lg 3}{\lg 3 + 2\lg 2 - 1},$$

$$\text{由给定数据 } t \approx 10 \times \frac{2\lg 2 - \lg 3}{\lg 3 + 2\lg 2 - 1} = 15.$$

故选: B

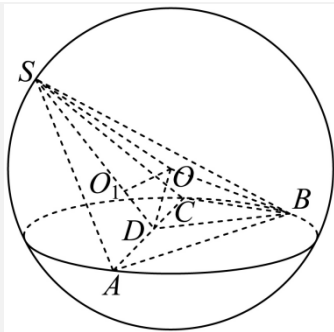
7. (本题 5 分) 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = 2$, $SA = SC = 2\sqrt{2}$, 二面角 $B-AC-S$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 ()

- A. $\frac{88\pi}{9}$ B. $\frac{104\pi}{9}$ C. $\frac{56\pi}{3}$ D. $\frac{104\pi}{3}$

【答案】 C

【分析】 如图, 取 AC 的中点 D , 连接 BD 和 SD , 则 $\angle SDB$ 为二面角 $B-AC-S$ 的平面角, 即 $\angle SDB = 150^\circ$, 过点 D 作平面 ABC 的垂线, 过点 O_1 作平面 SAC 的垂线, 则交点 O 为球心, 连接 OD , OS , 然后在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 、 $\text{Rt}\triangle OSO_1$ 中分别运用勾股定理、余弦定理可得 R^2 , 从而可求得球的表面积.

【详解】



如图，因为 $AB \perp BC$ ， $AB = BC = 2$ ，所以 $AC = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $SA = SC = 2\sqrt{2}$ ，所以 $\triangle SAC$ 为等边三角形，所以 $SD = \frac{\sqrt{3}}{2} SA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$ 。

取 AC 的中点 D ，连接 BD 和 SD ，则 $\angle SDB$ 为二面角 $B-AC-S$ 的平面角，即 $\angle SDB = 150^\circ$ 。

因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形，所以 D 为 $\triangle ABC$ 的外心。设 $\triangle SAC$ 的外心为 O_1 ，过点 D 作平面 ABC 的垂线，过点 O_1 作平面 SAC 的垂线，则交点 O 为球心，连接 OD ， OS 。设三棱锥 $S-ABC$ 外接球的半径为 R 。

在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中， $OD^2 = OB^2 - BD^2 = R^2 - (\sqrt{2})^2 = R^2 - 2$ ，

由已知得 $\angle SDO = 60^\circ$ ，在 $\triangle SDO$ 中，由余弦定理得

$$SO^2 = OD^2 + SD^2 - 2OD \cdot SD \cdot \cos \angle SDO,$$

即 $R^2 = R^2 - 2 + (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{R^2 - 2} \times \sqrt{6} \times \cos 60^\circ$ ，解得 $R^2 = \frac{14}{3}$ ，

故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{56\pi}{3}$ 。

故选：C。

【点睛】关键点睛：本题的关键是准确画出图形然后根据找到外接球心的位置，最终根据解三角形知识确定球的半径即可顺利求解。

8. (本题 5 分) 已知圆 D 是以圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点为圆心，半径为 1 的圆，圆 $C: (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 与圆 D 交于 A, B 两点，则当 $\angle ACB$ 最大时， $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

【答案】A

【分析】设 $D(a, b)$ ，写出圆 D 的方程，求得直线 AB 的方程，利用点 C 到直线 AB 的最小值来求得 $\angle ACB$ 最大时 $\triangle ABC$ 的面积。

【详解】设 $D(a, b)$ ，则 $a^2 + b^2 = 1$ ，

设 $a = \cos \theta, b = \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi, a + 2b = \cos \theta + 2\sin \theta$

$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \varphi) \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}], \quad a + 2b + 3 \in [3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}],$$

$$\text{圆 } D \text{ 的方程为 } (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1, x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \text{ ①},$$

$$\text{圆 } C: (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5 \text{ 的圆心为 } C(-1, -2), \text{ 半径为 } \sqrt{5},$$

$$\text{圆 } C \text{ 的方程可化为 } x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \text{ ②},$$

$$\text{由 ①② 得直线 } AB \text{ 的方程为 } (2+2a)x + (4+2b)y = 0, \text{ 即 } (1+a)x + (2+b)y = 0,$$

$\triangle ABC$ 是等腰三角形, $\angle ACB$ 为顶角, 则当 C 到直线 AB 的距离最小时, $\angle ACB$ 最大,

$$\text{当 } C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } \frac{|-(1+a) - 2(2+b)|}{\sqrt{(1+a)^2 + (2+b)^2}} = \frac{|a+2b+5|}{\sqrt{2(a+2b)+6}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+2b+5)^2}{2(a+2b)+6}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{(a+2b+3+2)^2}{a+2b+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{(a+2b+3)^2 + 4(a+2b+3) + 4}{a+2b+3}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(a+2b+3 + \frac{4}{a+2b+3} + 4 \right)}$$

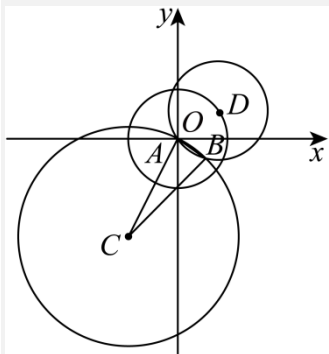
$$\geq \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[2\sqrt{(a+2b+3) \cdot \frac{4}{a+2b+3}} + 4 \right]} = 2,$$

当且仅当 $a+2b+3 = \frac{4}{a+2b+3}, a+2b+3 = 2, a+2b = -1$ 时等号成立.

当 C 到直线 AB 的距离取最小值 2 时, $|AB| = 2\sqrt{5-2^2} = 2,$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

故选: A



【点睛】 在利用基本不等式求最值的过程中, 要注意一正、二定、三相等. 求解圆与圆位置关系有关问题, 首先考虑数形结合的数学思想方法, 画出图象, 然后根据图象、圆的几何性质来对问题进行分析 and 求解.

二、多选题（共 20 分）

9.（本题 5 分）为考察一种新药预防疾病的效果，某科研小组进行动物实验，收集整理数据后将所得结果填入相应的 2×2 列联表中.由列联表中的数据计算得 $\chi^2 \approx 10.921$.参照附表，下列结论正确的是（ ）

α	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	5.02	6.635	7.879	10.828

- A. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下，认为“药物有效”
- B. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下，认为“药物无效”
- C. 根据小概率值 $\alpha=0.0001$ 的独立性检验，认为“药物有效”
- D. 对分类变量 X 与 Y ，统计量 χ^2 的值越大，则判断“ X 与 Y 有关系”的把握程度越大

【答案】AD

【分析】根据 χ^2 与参考值比较，结合独立性检验的定义，即可判断；

【详解】因为 $\chi^2 \approx 10.921$ ，即 $\chi^2 > 10.828$ ，

所以根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，

故在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下，认为药物有效，故 BC 错误.

而根据统计量 χ^2 的意义，可得其值越大，则判断 X 与 Y 有关系的把握程度越大，故 D 正确.

故选：AD.

10.（本题 5 分）关于等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ ，下列四个选项中正确的有（ ）

- A. 等差数列 $\{a_n\}$ ，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$
- B. 等比数列 $\{b_n\}$ ，若 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ ，则 $m+n=p+q$
- C. 若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ ，仍为等差数列
- D. 若 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和，则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ ，仍为等比数列

【答案】AC

【分析】利用等差数列下标和性质判断 A；举例说明判断 B；利用等差数列定义判断 C；举例说明判断 D.

【详解】对于 A，由等差数列下标和性质知，A 正确；

对于 B，取 $b_n = 2$ ，显然数列 $\{b_n\}$ 成等比数列，且 $b_3 \cdot b_4 = 4 = b_5 \cdot b_6$ ，而 $3+4 \neq 5+6$ ，B 错误；

对于 C，等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$(S_{2n} - S_n) - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = n^2 d,$$

$$(S_{3n} - S_{2n}) - (S_{2n} - S_n) = (a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots + a_{3n}) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}) = n^2 d,$$

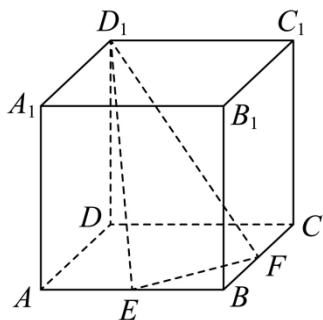
有 $2(S_{2n} - S_n) = S_n + (S_{3n} - S_{2n})$ ，因此 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差数列，C 正确；

对于 D，当等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q = -1$ ， n 为正偶数时， $S_n = 0$ ，显然 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 不成等比数列，D 错误。

故选：AC

11. (本题 5 分) 如图，设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 是 AB 的中点，点 P, F

为空间内两点，且 $\vec{BP} = \lambda \vec{BC} + \mu \vec{BB_1}$ ， $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ， $\vec{BF} = t \vec{BC}$ ($t \in [0, 1]$)，则 ()



- A. 若 $D_1F \perp$ 平面 A_1C_1D ，则点 F 与点 B 重合
- B. 设 $D_1P = \sqrt{5}$ ，则动点 P 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{2}$
- C. 平面 C_1D_1E 与平面 A_1D_1E 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- D. 若 $t = \frac{1}{2}$ ，则平面 D_1EF 截正方体所得截面的面积为 $\frac{7\sqrt{17}}{6}$

【答案】ABD

【分析】假设点 F 不与 B 重合，根据 $D_1B \perp$ 平面 A_1C_1D ， $D_1F \perp$ 平面 A_1C_1D ，可得

$D_1F \parallel D_1B$ ，而 $D_1F \perp D_1B = D_1$ ，故假设不成立，A 正确；根据已知判断出动点 P 的轨迹

是以点 C_1 为圆心，半径为 1 的圆的 $\frac{1}{4}$ ，进而判断选项 B；建立空间直角坐标系，利用向量法求解面面夹角余弦值即可判断选项 C；根据已知条件做出图形，即可求出面积判断

选项 D.

【详解】由正方体的性质知， $D_1B \perp$ 平面 A_1C_1D ，

若点 F 不与 B 重合，因为 $D_1F \perp$ 平面 A_1C_1D ，

则 $D_1F \parallel D_1B$ ，与 $D_1F \perp D_1B = D_1$ 矛盾，

故当 $D_1F \perp$ 平面 A_1C_1D 时，点 F 与 B 重合，故 A 正确；

因为 $\vec{BP} = \lambda \vec{BC} + \mu \vec{BB_1}$ ， $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ，

所以点 P 在平面 BCC_1B_1 上，

因为 $D_1P = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1P^2} = \sqrt{4 + C_1P^2} = \sqrt{5}$ ，

所以 $C_1P = 1$ ，

则动点 P 的轨迹是以点 C_1 为圆心，

以 1 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$ ，故其长度为 $\frac{\pi}{2}$ ，故 B 正确；

对于 C，以点 D 为坐标原点，

分别以 DA, DC, DD_1 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，

如图所示，则 $A_1(2, 0, 2), C_1(0, 2, 2), D_1(0, 0, 2), E(2, 1, 0)$ ，

所以 $\vec{C_1E} = (2, -1, -2), \vec{D_1E} = (2, 1, -2), \vec{A_1E} = (0, 1, -2)$ 。

设平面 C_1D_1E 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，

平面 A_1D_1E 的一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{C_1E} = 2x_1 - y_1 - 2z_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{D_1E} = 2x_1 + y_1 - 2z_1 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

令 $x_1 = 1, z_1 = 1$ ，所以 $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$ ，

$$\text{同理结合} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{A_1E} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{D_1E} = 0 \end{cases} \text{得} \vec{n}_2 = (0, 2, 1)$$

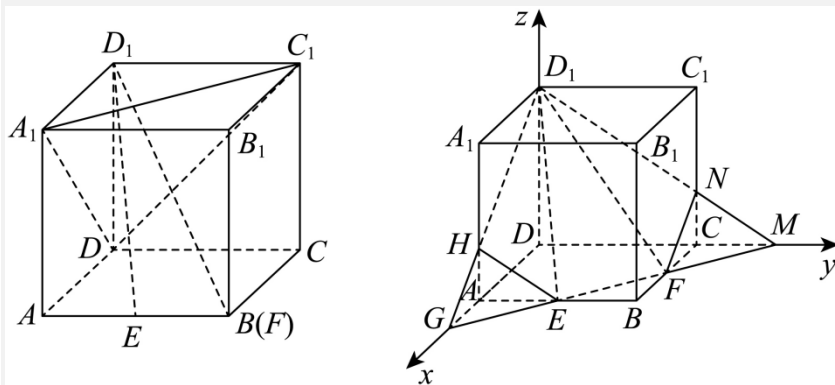
$$\text{因为} |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

所以平面 C_1D_1E 与平面 A_1D_1E 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，故 C 错误；

对于 D，过 E, F 的直线分别交 DA, DC 的延长线于点 G, M ，

然后再分别连接 D_1M, D_1G ，交侧棱 A_1A 于点 H ，

交侧棱 C_1C 于点 N ，连接 EH 和 NF ，如图所示：



则得截面为五边形 D_1HEFN ，

易求 $D_1G = D_1M = \sqrt{13}$, $GM = 3\sqrt{2}$, $GE = \sqrt{2}$, $GH = \frac{\sqrt{13}}{3}$,

$\cos \angle D_1GM = \frac{\frac{1}{2} \times GM}{D_1G} = \frac{3}{\sqrt{26}}$, 故 $\sin \angle D_1GM = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$,

所以 $S_{\triangle D_1GM} = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$,

$S_{\triangle GEH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{13}}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{17}}{6}$,

所以五边形 D_1HEFN 的面积 $S = S_{\triangle D_1GM} - 2S_{\triangle GEH} = \frac{7\sqrt{17}}{6}$ ，故 D 正确。

故选：ABD

12. (本题 5 分) 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$, $g(x)$, 其导函数分别为 $f'(x)$, $g'(x)$,

$f(x) = 6 - g'(x)$, $f(1-x) = 6 + g'(1+x)$, 且 $g(x) - 2$ 为奇函数, 则 ()

A. $g(0) = 2$

B. $f'(x+2) = f'(x)$

C. $g(x+4) = g(x)$

D. $f(1)g(1) + f(3)g(3) = 24$

【答案】 ACD

【分析】 先根据条件分析出 $g'(x)$ 的周期性对称性, 再得到 $f(x)$ 的周期性的对称性, 最后由求导得到 $f'(x)$ 和 $g(x)$ 的周期性和对称性, 代入求解即可。

【详解】 由题意得 $\begin{cases} f(x) = 6 - g'(x) \\ f(1-x) = 6 + g'(1+x) \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} f(1-x) = 6 - g'(1-x) \\ f(1-x) = 6 + g'(1+x) \end{cases}$,

两式相减可得 $g'(1+x) = -g'(1-x)$ ①, 所以 $g'(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 中心对称,

又因为 $g(x)-2$ 为奇函数，所以 $g(x)-2=-[g(-x)-2]=-g(-x)+2$ ②，

即 $g(x)+g(-x)=4$ ，所以 $g(x)$ 关于点 $(0,2)$ 中心对称，

而 $g(x)$ 定义域为 \mathbb{R} ，所以 $g(0)=2$ ，A 正确；

②式两边对 x 求导可得 $g'(x)=g'(-x)$ ，所以 $g'(x)$ 是偶函数，

以 $1+x$ 替换①中的 x 可得 $g'(2+x)=-g'(-x)=-g'(x)$ ，

所以 $g'(4+x)=-g'(2+x)=g'(x)$ ，所以 $g'(x)$ 是最小正周期为 4 的周期函数，

因为 $f(x)=6-g'(x)$ ，所以 $f(x)$ 也是最小正周期为 4 的周期函数，

即 $f(x+4)=f(x)$ ，两边求导可得 $f'(x+4)=f'(x)$ ，

所以 $f'(x)$ 也是最小正周期为 4 的周期函数，所以 $f'(x+2)=f'(x)$ 不恒成立，B 错误；

由①得 $g(1+x)=g(1-x)+C$ ，令 $x=0$ ，解得 $x=0$ ，

所以 $g(1+x)=g(1-x)$ ③，即 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

以 $x+1$ 替换③中的 x 可得 $g(x+2)=g(-x)$ ，

由②可知 $g(-x)=4-g(x)$ ，所以 $g(x+2)=4-g(x)$ ④，

所以 $g(x+4)=4-g(x+2)=g(x)$ ，所以 C 正确；

由上可知 $g'(x)$ 关于点 $(1,0)$ 中心对称，所以 $g'(1)=0$

又因为 $g'(x)$ 是偶函数，所以 $g'(-1)=g'(1)=0$

又因为 $g'(x)$ 是最小正周期为 4 的周期函数，所以 $g'(3)=g'(-1)=0$ ，

由条件 $f(x)=6-g'(x)$ 可得 $\begin{cases} f(1)=6-g'(1)=6 \\ f(3)=6-g'(3)=6 \end{cases}$

所以 $f(1)g(1)+f(3)g(3)=6g(1)+6g(3)=6(g(1)+g(3))$ ，

由④知 $g(1)+g(3)=4$ ，所以 $f(1)g(1)+f(3)g(3)=6 \times 4=24$ ，D 正确，

故选：ACD

【点睛】 关键点睛：解决这类题的关键是熟练掌握对称与周期的关系，若关于两点（纵坐标相同）或者两条直线（平行于 y 轴）对称，则周期为这两点或者这两条直线的距离的两倍，若关于一点和一直线（平行于 y 轴）对称，则周期为这点和这条直线的距离的四倍。

第 II 卷（非选择题）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/566050154053010110>