

2024 年全国高中数学联赛北京赛区预赛一试试卷

考试时间: 8:00 - 9:20

填空题 (1-8 题每题 8 分, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题每题 20 分, 共 120 分)

1. 设整数集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之积组成的集合为 $B = \{-30, -15, -10, -6, -5, -3, 2, 6, 10, 15\}$, 则集合 $A =$ _____.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right), & x \geq 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(f(x)) = m$ 恰有三个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3

且满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\frac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)}$ 的取值范围是_____.

3. 从 $1, 2, \dots, 2024$ 中任取两个数 $a, b (a \leq b)$, 则 $3^a + 7^b$ 的值中, 个位数字为 8 的数有_____个.

4. 设复数 z 满足 $|3z-2i|=6$, 令 $z_1 = \frac{z^2-10z+74}{z-5+7i}$, 则 $|z_1|$ 的最大值是_____.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \\ \frac{q+1}{p}, & \text{若 } x = \frac{q}{p}, \text{ 其中 } p, q \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } p, q \text{ 互质, } p > q \end{cases}$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right)$ 上的最大值为_____.

6. 对于 $c > 0$, 若非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a+b|$ 最大, 则 $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{2}{c}$ 的最小值为_____.

7. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + a \sin 4x - b$, 且 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数. 若方程 $f(x) + m = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上有四个不同的实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$ 的平方值为_____.

8. 已知 $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2625\}$, 且 A 中任意两个数的差的绝对值不等于 4, 也不等于 9, 则 $|A|$ 的最大值为_____.

9. 设多项式 $f(x) = x^{2024} + \sum_{i=0}^{2023} c_i x^i$, 其中 $c_i \in \{-1, 0, 1\}$. 记 N 为 $f(x)$ 的正整数根的个数 (含重根). 若 $f(x)$ 无负整数根, N 的最大值是_____.

10. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 AA_1 上的一点, 且 $A_1E=1$, F 为截面 A_1BD 上的动点, 则 $AF+FE$ 的最小值等于_____.

11. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：设 $\frac{(2n)!}{n!(n+2024)!}$ 写成既约分数后的分母为 $A(n)$, a_n 等于 $2A(n)$ 的最大质因数，则 a_n 的最大值等于_____.

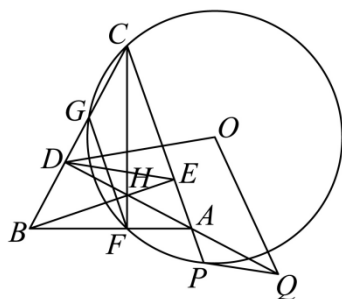
2024 年全国高中数学联赛北京赛区预赛二试试卷

考试时间: 9:40-12:30

12. 设 a, b, c 是三个正数，求证：

$$\frac{2a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}} + \frac{2b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2+2c^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}}.$$

13. 如图所示，锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线 AD, BE, CF 交于点 H ，过点 F 作 $FG \parallel AC$ 交直线 BC 于点 G ，设 $\triangle CFG$ 的外接圆为 $\odot O$, $\odot O$ 与直线 AC 的另一个交点为 P ，过 P 作 $PQ \parallel DE$ 交直线 AD 于点 Q ，连接 OD, OQ . 求证：
 $OD = OQ$.



14. 有 n 个球队参加比赛，球队之间的比赛计划已经安排好了.但是每场比赛的主场客场还没有分配好.这时每个球队都上报了自己能够接受的客场比赛的最大次数.最终组委会发现这些次数加在一起恰好是比赛的总场次，并且组委会还发现任意挑出若干支球队，他们能够接受的客场次数之和都要大于等于他们之间的比赛总场次.请问组委会能否安排好主客场使得每支球队都满意，请证明你的结论.

15. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个两两不同的正整数且 $a_1 a_2 \dots a_n$ 恰有 4048 个质因数. 如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中任意多个数相乘均不是一个整数的 4049 次方，求 n 的最大值.

2024 年全国高中数学联赛北京赛区预赛一试试卷

考试时间: 8:00 - 9:20

填空题 (1-8 题每题 8 分, 第 9 题 16 分, 第 10, 11 题每题 20 分, 共 120 分)

1. 设整数集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之积组成的集合为 $B = \{-30, -15, -10, -6, -5, -3, 2, 6, 10, 15\}$, 则集合 $A =$ _____.

【答案】 $\{-2, -1, 1, 3, 5\}$

【解析】

【分析】依据总的乘积, 绝对值最大的乘积, 绝对值最小的乘积去分析集合 A 中的各元素即可.

【详解】 A 中所有三元子集共有 $C_5^3 = 10$ 个,

A 中的每个元素在这些三元子集中均出现了 $\frac{10 \times 3}{5} = 6$ 次,

故 $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^6 = (-30) \times (-15) \times (-10) \times (-6) \times (-5) \times (-3) \times 2 \times 6 \times 10 \times 15$,

$|a_1 a_2 a_3 a_4 a_5| = 30$, 因为集合 B 中的元素有 6 个负数 4 个正数,

故集合 A 中的元素有 2 个负数 3 个正数, 所以 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 30$,

不妨设 $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq |a_4| \leq |a_5|$,

三个元素之积绝对值最大时, $a_3 a_4 a_5 = -30$, $a_1 a_2 = -1$,

又 A 为整数集合, 所以 $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ 或者 $a_1 = -1$, $a_2 = 1$;

三个元素之积绝对值最小时, $a_1 a_2 a_3 = 2$, 又 $a_1 a_2 = -1$, 所以 $a_3 = -2$, $a_4 a_5 = 15$,

因为集合 A 中的元素有 2 个负数 3 个正数, 故 a_4, a_5 均为正整数, 所以 $a_4 = 3$, $a_5 = 5$,

故 $A = \{-2, -1, 1, 3, 5\}$.

故答案为: $\{-2, -1, 1, 3, 5\}$.

【点睛】关键点点睛: 本题考查集合的子集, 关键是理解题目的意思, 并从“总的乘积, 绝对值最大的乘积, 绝对值最小的乘积”这些不同的角度去分析集合 A 中的各元素.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right), & x \geq 0 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(f(x)) = m$ 恰有三个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3

且满足 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\frac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[\frac{1}{\ln 2}, 1 + \frac{1}{2 \ln 2} \right)$

【解析】

【分析】 求出嵌套函数解析式 $f(f(x)) = \begin{cases} x+4, & x < -2, \\ \ln\left(\frac{1}{2}x+2\right), & -2 \leq x < 0, \\ \ln\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1\right], & x \geq 0 \end{cases}$ ，作出其图象，得到 $0 \leq m < \ln 2$ ，化简得

$$\frac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)} = 2 \left(1 - \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{m + \ln 2} \right), \text{ 设右边为新函数, 根据其单调性得到范围.}$$

【详解】 当 $x < -2$ 时, 则 $x+2 < 0$, 则 $f(f(x)) = x+2+2 = x+4$,

当 $-2 \leq x < 0$ 时, $0 \leq x+2 < 2$, 则 $f(f(x)) = \ln\left[\frac{1}{2}(x+2)+1\right] = \ln\left(\frac{1}{2}x+2\right)$,

当 $x \geq 0$ 时, $f(f(x)) = \ln\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1\right]$,

$$\text{即 } f(f(x)) = \begin{cases} x+4, & x < -2, \\ \ln\left(\frac{1}{2}x+2\right), & -2 \leq x < 0, \\ \ln\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1\right], & x \geq 0 \end{cases}$$

方程 $f(f(x)) = m$ 恰有三个不相等的实数根等价于直线 $y = m$ 与函数 $y = f(f(x))$ 的图象有三个不同交点, 因此 $0 \leq m < \ln 2$.

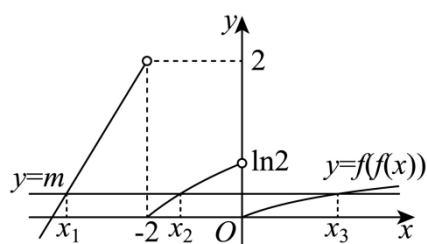
此时 $x_1+4 = m$ 且 $\ln\left(\frac{1}{2}x_2+2\right) = m$, 则 $x_1 = m-4$, $\ln(x_2+4) = m + \ln 2$,

从而 $\frac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)} = \frac{2m+1}{m+\ln 2} = 2 \left(1 - \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{m + \ln 2} \right)$,

设 $h(m) = 2 \left(1 - \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{m + \ln 2} \right)$, 则其在 $[0, \ln 2)$ 上单调递增,

因此 $\frac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)}$ 的取值范围是 $\left[\frac{1}{\ln 2}, 1+\frac{1}{2\ln 2}\right)$.

故答案为: $\left[\frac{1}{\ln 2}, 1+\frac{1}{2\ln 2}\right)$.



【点睛】关键点点睛：本题的关键是利用分段函数的解析式求出 $y=f(f(x))$ 的表达式，然后利用转化法、数形结合思想进行求解.

3. 从 $1, 2, \dots, 2024$ 中任取两个数 $a, b (a \leq b)$, 则 $3^a + 7^b$ 的值中, 个位数字为 8 的数有 _____ 个.

【答案】384307

【解析】

【分析】先找出 3^n 个位数字, 7^n 个位数字, 得出周期性, 再找出个位数字是 8 的情形即可.

【详解】当 $n=1, 2, 3, 4$ 时, 3^n 个位数字分别是 7, 9, 3, 1, 7^n 个位数字分别是 7, 9, 3, 1, 周期都是 4.

个位数字为 8 的情形有 $3^{4m+2} + 7^{4n+2}, 3^{4m} + 7^{4n+1}, 3^{4m+3} + 7^{4n}$,

综上, 当且仅当 $(a, b) = (4m+2, 4n+2), (4m, 4n+1), (4m+3, 4n)$ 时, $3^a + 7^b \equiv 8 \pmod{10}$,

形如 $(4m+2, 4n+2), (4m, 4n+1), (4m+3, 4n)$ 的数对 (a, b) 的个数分别为:

$$\frac{506 \times 506 - 506}{2} + 506 = 128271, \frac{(1+505) \times 505}{2} = 127765, \frac{(1+506) \times 506}{2} = 128271,$$

下证这些数不重复:

因为 $a \leq b$, 所以 $3^a + 7^b < 7^a + 7^b \leq 2 \times 7^b$,

若 $3^{a_1} + 7^{b_1} = 3^{a_2} + 7^{b_2} = (b_1 \geq b_2)$, 则 $2 \cdot 7^{b_2} > 3^{a_2} + 7^{b_2} = 3^{a_1} + 7^{b_1} > 7^{b_1}$,

故 $b_1 = b_2 \Rightarrow a_1 = a_2$,

因此, 不存在重复的数

故共有 $128271 + 127765 + 128271 = 384307$ 个.

故答案为: 384307.

4. 设复数 z 满足 $|3z-2i|=6$, 令 $z_1 = \frac{z^2-10z+74}{z-5+7i}$, 则 $|z_1|$ 的最大值是 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{586}}{3} + 2$

【解析】

【分析】利用复数差的几何意义可求的最值.

【详解】因为 $|3z - 2i| = 6$ ，所以 $\left|z - \frac{2}{3}i\right| = 2$ ，

$$z_1 = \frac{z^2 - 10z + 74}{z - 5 + 7i} = \frac{(z-5)^2 - (7i)^2}{z-5+7i} = \frac{(z-5+7i)(z-5-7i)}{z-5+7i} = z-5-7i = z-(5+7i),$$

复数 z 在复平面上所对应的点在以 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 为圆心，2 为半径的圆上，

$|z_1|$ 是以 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 为圆心，2 为半径的圆上的点到 $(5, 7)$ 两点间的距离，

$$\left(0, \frac{2}{3}\right) \text{ 到 } (5, 7) \text{ 的距离为 } \sqrt{(5-0)^2 + \left(7-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{586}}{3},$$

$$\text{所以 } |z_1| \in \left[\frac{\sqrt{586}}{3} - 2, \frac{\sqrt{586}}{3} + 2\right], \quad |z_1| \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{586}}{3} + 2.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{586}}{3} + 2$.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \\ \frac{q+1}{p}, & \text{若 } x = \frac{q}{p}, \text{ 其中 } p, q \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } p, q \text{ 互质, } p > q \end{cases}$ ，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right)$ 上的最大值为_____.

【答案】 $\frac{18}{19}$

【解析】

【分析】分类讨论 x 是有理数与无理数现两种情况，结合分段函数的定义，利用换元法分析得 $f(x) \leq \frac{18}{19}$ ，从而得解.

【详解】若 x 为有理数，且 $x \in \left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right)$ ，

$$\text{设 } x = \frac{a}{a+\lambda} \in \left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right) (a, \lambda \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{由 } \frac{8}{9} < \frac{a}{a+\lambda} < \frac{9}{10}, \text{ 知 } \begin{cases} 10a < 9a+9\lambda \\ 8a+8\lambda < 9a \end{cases} \Rightarrow 8\lambda < a < 9\lambda,$$

①当 $\lambda=1$ 时, a 不存在;

②当 $\lambda=2$ 时, 存在唯一的 $a=17$, 此时 $x=\frac{17}{19}, f(x)=\frac{18}{19}$;

③当 $\lambda \geq 3$ 时, 设 $a=8\lambda+m$, 其中 $1 \leq m \leq \lambda-1$, 且 $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{此时 } f(x) = \frac{8\lambda+m+1}{9\lambda+m},$$

$$\text{因为 } \frac{18}{19} - \frac{8\lambda+m+1}{9\lambda+m} = \frac{10\lambda-m-19}{19(9\lambda+m)} = \frac{(\lambda-m)+(9\lambda-19)}{19(9\lambda+m)} > 0,$$

所以若 x 为有理数, 则 $x=\frac{17}{19}$ 时, $f(x)$ 取最大值 $\frac{18}{19}$;

若 x 为无理数, 且 $x \in \left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right)$ 时, $f(x)=x < \frac{9}{10} < \frac{18}{19}$.

综上所述, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\right)$ 上的最大值为 $\frac{18}{19}$.

故答案为: $\frac{18}{19}$.

6. 对于 $c > 0$, 若非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 且使 $|2a+b|$ 最大, 则 $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{2}{c}$ 的最小值为_____.

【答案】-5

【解析】

【分析】根据等式先配方出平方和 $\left(a - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}b^2$, 再利用柯西不等式, 凑出 $|2a+b|$, 以等号成立的条件为依据,

把 $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{2}{c}$ 转化为一个变量的函数, 求最值即可.

【详解】因为 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$, 所以 $\frac{c}{4} = a^2 - \frac{1}{2}ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}b^2$,

$$\text{由柯西不等式得, } \left[\left(a - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}b^2\right] \left[2^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{15}}\right)^2\right] \geq \left[2\left(a - \frac{b}{4}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4}b \cdot \frac{6}{\sqrt{15}}\right]^2 = |2a+b|^2,$$

$$\text{当 } |2a+b| \text{ 最大时, 有 } \frac{a - \frac{b}{4}}{\frac{4}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}b}{\frac{6}{\sqrt{15}}}, \text{ 所以 } a = \frac{3}{2}b, \quad c = 10b^2,$$

$$\text{所以 } \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{2}{c} = \frac{3}{\frac{3}{2}b} - \frac{4}{b} + \frac{2}{10b^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{b}\right)^2 - \frac{2}{b} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{b} - 5\right)^2 - 5,$$

当 $\frac{1}{b} = 5$, 即 $b = \frac{1}{5}$ 时, 上式取得最小值 -5.

故答案为: -5.

【点睛】关键点睛: 本题考查柯西不等式, 关键在于用柯西不等式凑出 $|2a+b|^2$, 当反推柯西不等式时, 需要结合不等式两边已有的式子, 对相同未知数的系数进行分析配凑.

7. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x + a \sin 4x - b$, 且 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数. 若方程 $f(x) + m = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上有四个不

同的实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 则 $f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$ 的平方值为_____.

【答案】 $\frac{1}{12}$

【解析】

【分析】根据降幂公式、奇函数的性质求解 $f(x)$ 的解析式, 再根据正弦函数的性质, 结合整体思想进行求解即可.

【详解】 $f(x) = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + a \sin 4x - b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x)^2 + a \sin 4x - b$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1+\cos 4x}{4} + a \sin 4x - b = a \sin 4x + \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4} - b,$

Q $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数 $\therefore f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称,

所以 $\begin{cases} \frac{3}{4} - b = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \sin \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{4} \cos \frac{2}{3}\pi = 0 \end{cases}$, 所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{12}, b = \frac{3}{4},$

$\therefore f(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} \sin 4x + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{6} \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right),$

Q $x \in [0, \pi] \therefore 4x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}\right],$

$\therefore$ 方程 $f(x) + m = 0$, 即方程 $f(x) = -m$ 在 $[0, \pi]$ 上有四个不同的实数解 x_1, x_2, x_3, x_4 ,

则 $f(0) < -m < f(x)_{\max}$ 或 $f(x)_{\min} < -m < f(0)$, 即 $\frac{1}{4} < -m < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{6} < -m < \frac{1}{4},$

当 $\frac{1}{4} < -m < \frac{\sqrt{3}}{6}$, 即 $-\frac{\sqrt{3}}{6} < m < -\frac{1}{4}$ 时,

则 $4x_1 + \frac{\pi}{3} + 4x_2 + \frac{\pi}{3} = \pi, 4x_3 + \frac{\pi}{3} + 4x_4 + \frac{\pi}{3} = 5\pi, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{7\pi}{6},$

$\therefore f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \sin\left(4 \times \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6},$

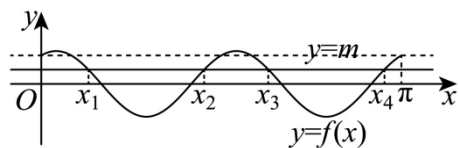
当 $-\frac{\sqrt{3}}{6} < -m < \frac{1}{4}$, 即 $-\frac{1}{4} < m < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,

$$4x_1 + \frac{\pi}{3} + 4x_2 + \frac{\pi}{3} = 3\pi, 4x_3 + \frac{\pi}{3} + 4x_4 + \frac{\pi}{3} = 7\pi, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13\pi}{6},$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \sin\left(4 \times \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \frac{5\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \text{ 的平方值为 } \frac{1}{12}.$$

故答案为: $\frac{1}{12}$.



8. 已知 $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2625\}$, 且 A 中任意两个数的差的绝对值不等于 4, 也不等于 9, 则 $|A|$ 的最大值为

_____.

【答案】1212

【解析】

【分析】根据 $2625 = 13 \times 201 + 12$, 取 $A = \{x \mid x = 13t + k, 0 \leq t \leq 201, t \in \mathbb{Z}, k = 1, 4, 6, 9, 11, 12\}$, 即可满足 A 中任何两个数的差的绝对值不等于 4, 也不等于 9, 然后证明在 $1, 2, \dots, 13$ 中, 最多有 6 个数作为余数 k 入选 A, 故 $|A| \leq 6 \times 202 = 1212$.

【详解】因为 $2625 = 13 \times 201 + 12$, 取 $A = \{x \mid x = 13t + k, 0 \leq t \leq 201, t \in \mathbb{Z}, k = 1, 4, 6, 9, 11, 12\}$,

即可满足 A 中任何两个数的差的绝对值不等于 4, 也不等于 9.

下面证明以上满足题设条件.

若 $|13(t-r) + (b-a)| = 4$ 或 9, $a, b \in \{1, 4, 6, 9, 11, 12\}$, 并且 $0 \leq r \leq t \leq 201$,

(1) 当 $t-r \geq 2$ 时, 有 $13(t-r) \geq 26$, 而 $-11 \leq b-a \leq 11$,

因此 $|13(t-r) + (b-a)| \neq 4, 9$;

(2) 当 $t-r=1$ 时, 为使 $|13(t-r) + (b-a)| = 4$ 或 9, 应使得 $|13 + (b-a)| = 4$ 或 9,

进而使得 $b-a = -4$ 或 -9 , 但 $a, b \in \{1, 4, 6, 9, 11, 12\}$, 故满足不了,

因此 $|13(t-r) + (b-a)| \neq 4, 9$;

(3) 当 $t-r=0$ 时, 为使 $|13(t-r) + (b-a)| = 4$ 或 9, 应使得 $|b-a| = 4$ 或 9,

进而使得 $b-a = \pm 4$ 或 ± 9 ，但 $a, b \in \{1, 4, 6, 9, 11, 12\}$ ，故满足不了，

因此 $|13(t-r) + (b-a)| \neq 4, 9$ ；

综上所述， $|13(t-r) + (b-a)| \neq 4, 9$ ，这里 $a, b \in \{1, 4, 6, 9, 11, 12\}$ ，并且 $0 \leq r \leq t \leq 201$ 。

故 A 中任何两个数的差的绝对值不等于 4，也不等于 9，此时 $|A| = 6 \times 202 = 1212$ 。

另一方面，在模 13 下考虑，将 1, 5, 9, 0, 4, 8, 12, 3, 7, 11, 2, 6, 10 排成一个首尾相连的圆圈（这里 1 和 10 首尾相连），

任意两个相邻的数的差的绝对值均为 4 或 9，

那么从中任取 7 个数，其中必定会有两个数的差的绝对值均为 4 或 9。

因此在 1, 2, ..., 13 中，不可能同时有 7 个数作为余数 k 入选 A，

则 $|A| \leq 6 \times 202 = 1212$ 。

所以 $|A|$ 的最大值为 1212。

故答案为：1212。

9. 设多项式 $f(x) = x^{2024} + \sum_{i=0}^{2023} cx^i$ ，其中 $c_i \in \{-1, 0, 1\}$ 。记 N 为 $f(x)$ 的正整数根的个数（含重根）。若 $f(x)$

无负整数根， N 的最大值是_____。

【答案】10

【解析】

【分析】先得到 $f(x)$ 的整数根只能是 -1, 0, 1，并举例得到 $N = 10$ 的情况，再说明 $N \geq 11$ 时不合要求，从而得到结论。

【详解】当 $|x| \geq 2$ 时， $|x|^{2024} > \sum_{i=0}^{2023} |x|^i \geq \left| \sum_{i=0}^{2023} cx^i \right|$ ，所以 $f(x)$ 的整数根只能是 -1, 0, 1，

注意到 $f(x) = (x-1)(x^3-1)(x^5-1)(x^{11}-1)(x^{21}-1)(x^{43}-1)(x^{85}-1)(x^{171}-1)(x^{341}-1)(x^{683}-1)x^{660}$ ，

满足条件，

此时 $f(x)$ 的次数为 2024，且 $f(x)$ 展开式后任两项的指数不同，因此每项的系数为 -1, 0, 1，

且 1 是 $f(x)$ 的 10 重根，-1 不为 $f(x)$ 的根，即此时 $N = 10$ ，理由如下：

记 $f_i = x^{q_i} - 1$ ，其中 $q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 11, q_5 = 21, q_6 = 43$ ，

$q_7 = 85, q_8 = 171, q_9 = 341, q_{10} = 683$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/566132015041010213>