专题25　圆的基本性质

中考命题解读

近几年的中考试题，圆的基本性质的考察主要以综合题为主，每年必考，考察圆心角、弧与圆周角的关系、垂径定理与圆有关的基本作图等知识典，预测2023年中考仍会出现考察上述知识点的题目。

考标要求

1. 理解圆心角及其所对的弧、弦之间的关心；

2. 理解并运用圆周角定理及其推论

3. 探索并证明垂径定理会应用垂径定理解决与圆有关的问题；、

4. 理解并运用圆内接四边形的性质

考点精讲

考点1　圆的定义及性质

圆的定义：在一个平面内，线段OA绕它固定的一个端点O旋转一周，另一个端点A所形成的图形叫圆。这个固定的端点O叫做圆心，线段OA叫做半径。

圆的表示方法：以O点为圆心的圆记作⊙O，读作圆O。

圆的特点：在一个平面内，所有到一个定点的距离等于定长的点组成的图形。

确定圆的条件：1）圆心；2）半径。

备注：圆心确定圆的位置，半径长度确定圆的大小。

【补充】1）圆心相同且半径相等的圆叫做**同圆**；

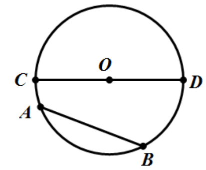
2）圆心相同，半径不相等的两个圆叫做**同心圆**；

3）半径相等的圆叫做**等圆**。

圆的对称性：1）圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴；

2）圆是以圆心为对称中心的中心对称图形。

考点2　圆的有关概念



弦的概念：连结圆上任意两点的线段叫做**弦**(例如：右图中的AB)。

直径的概念：经过圆心的弦叫做**直径**（例如：右图中的CD）。

备注：1）直径是同一圆中最长的弦。2）直径长度等于半径长度的2倍。

弧的概念：圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称**弧**。以A、B为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$，读作圆弧AB或弧AB。

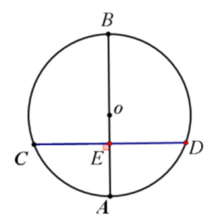
等弧的概念：**在同圆**或**等圆中**，能够**互相重合**的弧叫做等弧。

半圆的概念：圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**。

优弧的概念：在一个圆中大于半圆的弧叫做**优弧**。

劣弧的概念：小于半圆的弧叫做**劣弧**。

考点3　垂径定理



垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧。

推论1：1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧。

推论2：圆的两条平行弦所夹的弧相等。

常见辅助线做法（考点）：1）过圆心，作垂线，连半径，造Rt△，用勾股，求长度；

2）有弧中点，连中点和圆心，得垂直平分

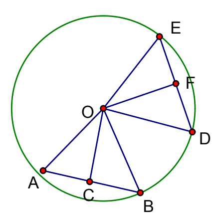
考点4　垂径定理的应用

经常为未知数，结合方程于勾股定理解答

考点5　圆心角的概念

圆心角概念：顶点在圆心的角叫做**圆心角**。

弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

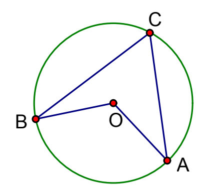


推论：在**同圆或等圆**中，如果**两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距**中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量分别相等。

考点6 圆角角的概念

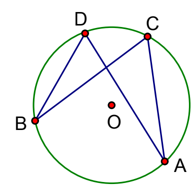
圆周角概念：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做**圆周角**。

圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。（即：圆周角 $= \frac{1}{2}$ 圆心角）

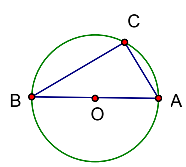


推论1：同弧或等弧所对的圆周角相等。

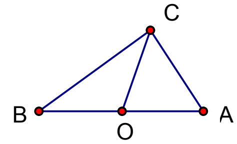
在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等。



推论2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角，$90°$的圆周角所对的弦是直径。



推论3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。

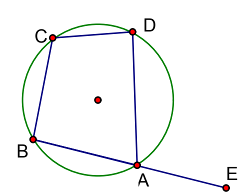


考点7 圆内接四边形

圆的内接四边形定理：圆的内接四边形的对角互补，外角等于它的内对角。

即：在$\odot O$中，　$\because$四边$ABCD$是内接四边形

$\therefore \angle C + \angle BAD = 180°$　　$\angle B + \angle D = 180°$



$\angle DAE = \angle C$

母题精讲

【典例1】（2022•宜昌）石拱桥是我国古代人民勤劳和智慧的结晶（如图1），隋代建造的赵州桥距今约有1400年历史，是我国古代石拱桥的代表．如图2是根据某石拱桥的实物图画出的几何图形，桥的主桥拱是圆弧形，表示为$\overset{\frown}{AB}$．桥的跨度（弧所对的弦长）$AB=26m$，设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为O，半径$OC\perp AB$，垂足为D．拱高（弧的中点到弦的距离）$CD=5m$．连接OB．

（1）直接判断AD与BD的数量关系；

（2）求这座石拱桥主桥拱的半径（精确到$1m$）．

图1

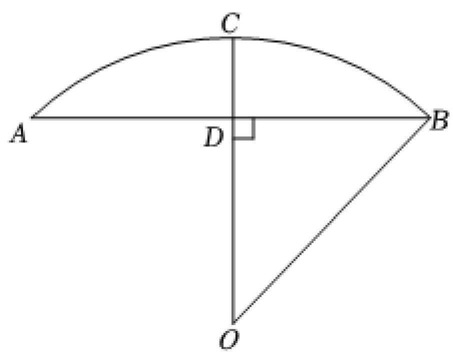


图2

【解答】解：（1）∵$OC\perp AB$，

∴$AD=BD$；

（2）设主桥拱半径为R，由题意可知$AB=26$，$CD=5$，

∴$BD=\frac{1}{2}AB=13$，

$OD=OC-CD=R-5$，

∵$\angle ODB=90°$，

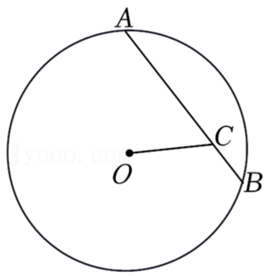
∴$OD^2+BD^2=OB^2$，

∴$(R-5)^2+13^2=R^2$，

解得$R=19.4\approx19$，

答：这座石拱桥主桥拱的半径约为19m．

【变式1-1】（2022•台湾）如图，AB为圆O的一弦，且C点在AB上．若$AC=6$，$BC=2$，AB的弦心距为3，则OC的长度为何？（　　）



A．3　　B．4　　C．$\sqrt{11}$　　D．$\sqrt{13}$

【答案】D

【解答】解：作$OD\perp AB$于点D，如图所示，

由题意可知：$AC=6$，$BC=2$，$OD=3$，

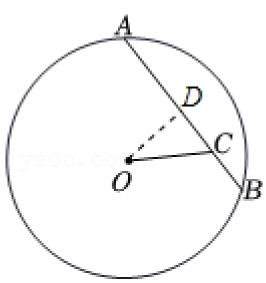
$\therefore AB=8$，

$\therefore AD=BD=4$，

$\therefore CD=2$，

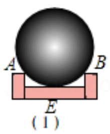
$\therefore OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，

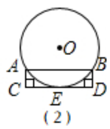
故选：D．



【变式1-2】（2022•鄂州）工人师傅为检测该厂生产的一种铁球的大小是否符合要求，设计了一个如图（1）所示的工件槽，其两个底角均为90°，将形状规则的铁球放入槽内时，若同时具有图（1）所示的A、B、E三个接触点，该球的大小就符合要求．图（2）是过球心及A、B、E三点的截面示意图，已知$\odot O$的直径就是铁球的直径，AB是

⊙O的弦，CD切⊙O于点E，$AC\perp CD$、$BD\perp CD$，若$CD=16cm$，$AC=BD=4cm$，则这种铁球的直径为（　　）

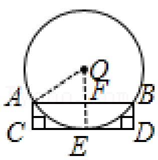




A．10cm　　　　B．15cm　　　　C．20cm　　　　D．24cm

【答案】C

【解答】解：如图，连接OE，交AB于点F，连接OA，



∵$AC\perp CD$、$BD\perp CD$，

∴$AC\parallel BD$，

∵$AC=BD=4cm$，

∴四边形$ACDB$是平行四边形，

∴四边形$ACDB$是矩形，

∴$AB\parallel CD$，$AB=CD=16cm$，

∵CD切⊙O于点E，

∴$OE\perp CD$，

∴$OE\perp AB$，

∴四边形$EFBD$是矩形，$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times16=8$（$cm$），

∴$EF=BD=4cm$，

设⊙O的半径为rcm，则$OA=rcm$，$OF=OE-EF=$（$r-4$）cm，

在Rt△AOF中，$OA^2=AF^2+OF^2$，

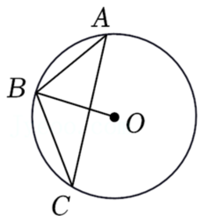
∴$r^2=8^2+$（$r-4$）^{2}，

解得：$r=10$，

∴这种铁球的直径为20cm，

故选：C.

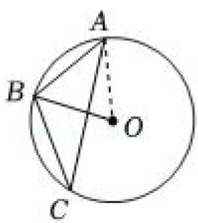
【典例2】（2022•阜新）如图，A，B，C是$\odot O$上的三点，若$\angle C=35^\circ$，则$\angle ABO$的度数是（　　）



A．35°　　B．55°　　C．60°　　D．70°

【答案】B

【解答】解：连接OA，



$\because \angle C=35^\circ$，

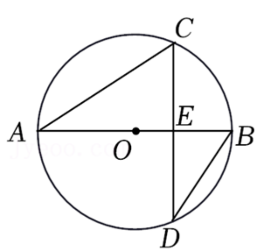
$\therefore \angle AOB=2\angle C=70^\circ$，

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle ABO=\angle BAO=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOB)=55^\circ$．

故选：B．

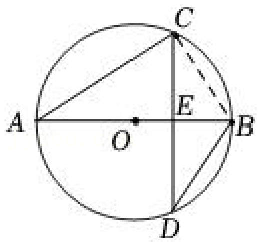
【变式2-1】（2022•巴中）如图，AB为$\odot O$的直径，弦CD交AB于点E，$\widehat{BC}=\widehat{BD}$，$\angle CDB=30^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$，则$OE=$（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．1　　D．2

【答案】C

【解答】解：如图，连接BC，



∵AB为⊙O的直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，

∴$AB\perp CD$，

∵$\angle BAC=\angle CDB=30^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$，

∴$AE=AC\cdot\cos\angle BAC=3$，

∵AB为⊙O的直径，

∴$\angle ACB=90^\circ$，

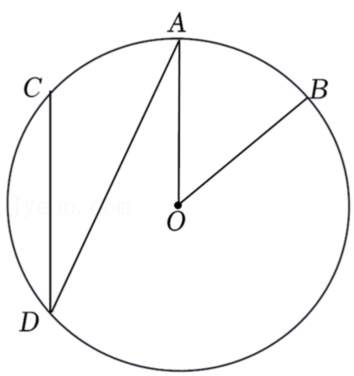
∴$AB=\dfrac{AC}{\cos\angle BAC}=4$，

∴$OA=2$，

∴$OE=AE-OA=1$．

故选：C．

【变式2-2】（2022•朝阳）如图，在⊙O中，点A是$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\angle ADC=24^\circ$，则$\angle AOB$的度数是（　　）



A．24°　　　　B．26°　　　　C．48°　　　　D．66°

【答案】C

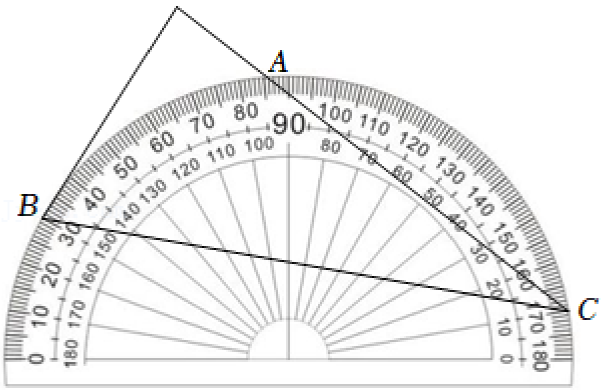
【解答】解：∵点A是$\overset{\frown}{BC}$的中点，

∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}$，

∴$\angle AOB=2\angle ADC=2\times24^\circ=48^\circ$．

故选：C．

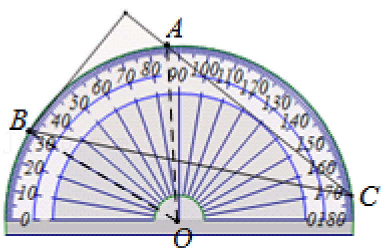
【变式2-3】（2022•枣庄）将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上，使点C在半圆上．点A，B的读数分别为86°，30°，则$\angle ACB$的度数是（　　）



A．28°　　B．30°　　C．36°　　D．56°

【答案】A

【解答】解：连接OA，OB．



由题意，$\angle AOB = 86° - 30° = 56°$，

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 28°$，

故选：A．

【典例3】（2022•呼和浩特）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径的$\odot O$交BC于点D，交线段CA的延长线于点E，连接BE．

（1）求证：$BD=CD$；

（2）若$\tan C=\frac{1}{2}$，$BD=4$，求AE．