

第 09 讲 立体几何与空间向量 章节总结

目录

第一部分：高考真题回归.....	2
第二部分：高频考点一遍过.....	4
高频考点一：空间位置关系证明的传统法与向量法.....	4
角度 1：用传统法证明空间的平行和垂直关系	4
角度 2：利用向量证明空间的平行和垂直关系	6
高频考点二：空间角的向量求法.....	10
角度 1：用传统法求异面直线所成角	10
角度 2：用向量法求异面直线所成角	10
角度 3：用向量法解决线面角的问题（定值+探索性问题（最值，求参 数））.....	11
角度 4：用向量法解决二面角的问题（定值+探索性问题（最值，求参 数））.....	13
高频考点三：距离问题.....	20
角度 1：点到直线的距离	20
角度 2：点到平面的距离（等体积法）	21
角度 3：点到平面的距离（向量法）	22
高频考点四：立体几何折叠问题.....	24

第一部分：高考真题回归

1. (2023·北京·统考高考真题) 坡屋顶是我国传统建筑造型之一, 蕴含着丰富的数学元素. 安装灯带可以勾勒出建筑轮廓, 展现造型之美. 如图, 某坡屋顶可视为一个五面体, 其中两个面是全等的等腰梯形, 两个面是全等的等腰三角形. 若 $AB = 25\text{m}$, $BC = AD = 10\text{m}$, 且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面 $ABCD$ 的夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$, 则该五面体的所有棱长之和为 ()

- A. 102m
B. 112m
C. 117m
D. 125m

2. (2023·全国(乙卷理)·统考高考真题) 已知圆锥 PO 的底面半径为 $\sqrt{3}$, O 为底面圆心, PA, PB 为圆锥的母线, $\angle AOB = 120^\circ$, 若 $\triangle PAB$ 的面积等于 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, 则该圆锥的体积为 ()

- A. π B. $\sqrt{6}\pi$ C. 3π D. $3\sqrt{6}\pi$

3. (2023·全国(甲卷理)·统考高考真题) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形, $PC=PD=3, \angle PCA=45^\circ$, 则 $\triangle PBC$ 的面积为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

4. (2023·北京·统考高考真题) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = BC = 1$, $PC = \sqrt{3}$.

(1)求证: $BC \perp$ 平面 PAB ;

(2)求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

5. (2023·全国(甲卷文)·统考高考真题) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1C \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$.

(1)证明: 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 设 $AB = A_1B$, $AA_1 = 2$, 求四棱锥 $A_1 - BB_1C_1C$ 的高.

6. (2023·全国(新高考Ⅱ卷)·统考高考真题) 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $DA = DB = DC$, $BD \perp CD$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$, E 为 BC 的中点.

(1) 证明: $BC \perp DA$;

(2) 点 F 满足, 求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

第二部分: 高频考点一遍过

高频考点一: 空间位置关系证明的传统法与向量法

角度 1: 用传统法证明空间的平行和垂直关系

典型例题

例题 1. (2023·浙江·统考模拟预测) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = 2BC = 2$, E 为 PD 中点.

(1) 求证: $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 设平面 EAC 与平面 DAC 的夹角为 45° , 求三棱锥 $E-ACD$ 的体积.

例题 2. (2023·辽宁锦州·统考模拟预测) 在直角梯形 $ABCD$ 中(如图一), $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = \frac{1}{2}AB = 2$. 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 $AD \perp DB$ (如图二).

(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ADC ;

(2) 设 E 为线段 AB 的中点, 求点 E 到直线 CD 的距离.

例题 3. (2023·河南·校联考模拟预测) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 CD 上, 且满足 $AD = DE = 2, CE = 1$, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 向上翻折, 使点 D 到点 P 的位置, 构成四棱锥 $P-ABCE$.

(1) 若点 F 在线段 AP 上, 且 $EF \perp$ 平面 PBC , 试确定点 F 的位置;

(2) 若 $PB = \sqrt{7}$, 求四棱锥 $P-ABCE$ 的体积.

例题 4. (2023·新疆阿勒泰·统考三模) 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点, $AB = 2BC = 2CD$, 如图①, 以 DE 为折痕将 $\triangle ADE$ 折起, 使点 A 到达点 P 的位置, 如图②.

(1) 证明: $CP \perp DE$;

(2) 若 $CE \perp$ 平面 DEP , 且 $AB = 2$, 求点 C 到平面 PBD 的距离

例题 5. (2023·四川凉山·三模) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = PA = 2$, 且直线 PD 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求点 C 到平面 PBD 的距离.

角度 2：利用向量证明空间的平行和垂直关系

典型例题

例题 1. (2023 · 北京 · 北京四中校考模拟预测) 如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E, F 分别是棱 AA_1, BB_1 上的点, $A_1E = BF = \frac{1}{3}AA_1$.

(1) 证明: 平面 $CEF \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 若 $AC = AE = 2$, 求二面角 $E - CF - C_1$ 的余弦值.

例题 2. (2023 · 北京密云 · 统考三模) 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp MN$, $AB = 2$, $AD = AP = 4$, M, N 分别是 BC, PD 的中点.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求二面角 $N - AM - B$ 的余弦值.

例题 3. (2023 · 山东 · 沂水县第一中学校联考模拟预测) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 4BC = 4$, $CD = \sqrt{5}$, E 为边 AD 上的点, $CE \perp AD$, $CE = 1$, 将 $VDEC$ 沿直线 CE 翻折到 $VPEC$ 的位置, 且 $\angle PEA = \frac{\pi}{3}$, 连接 PA, PB .

(1) 证明: $BE \perp PC$;

(2) Q 为线段 PA 上一点, 且 $\vec{AQ} = \lambda \vec{AP}$, 若二面角 $Q-BC-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 求实数 λ 的值.

考点一练透核心考点

1. (2023·新疆喀什·校考模拟预测) 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , D 、 E 分别为 AC 、 AA_1 的中点, $AC=AA_1=2$.

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 A_1BC ;

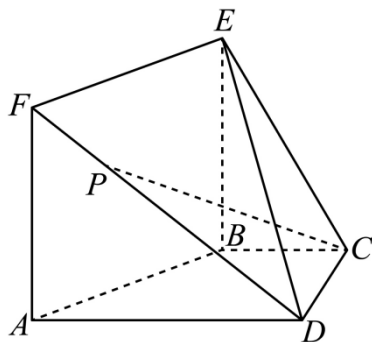
(2) 求 DE 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.

2. (2023·山东·校联考二模) 如图, 在正三棱台 $ABC-DEF$ 中, M 、 N 分别为棱 AB 、 BC 的中点, $AB=2DE$.

(1) 证明: 四边形 $MNFD$ 为矩形;

(2) 若四边形 $MNFD$ 为正方形, 求直线 BC 与平面 $ACFD$ 所成角的正弦值.

3. (2023·全国·校联考模拟预测) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABEF$ 为正方形, 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, $AD \parallel BC$, $AD \perp DC$, $AD=3DC=3BC=3$, P 是棱 DF 上的一点.



(1) 是否存在点 P , 使得 $PC \parallel$ 平面 $ABEF$? 若存在, 则求出 $\frac{FP}{PD}$ 的值; 若不存 F 在, 请说明理由;

(2) 求多面体 $ABCDEF$ 的体积.

4. (2023·湖北黄冈·浠水县第一中学校考模拟预测) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , D, E 分别为棱 AB, B_1C_1 的中点, $BC=2, AB=2\sqrt{3}, A_1C_1=4$.

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 若三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 求二面角 $D-A_1C-A$ 的正弦值.

5. (2023·甘肃兰州·校考模拟预测) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PD=CD=1, BC=\sqrt{2}, M$ 为 BC 的中点.

(1) 证明: $PB \perp AM$.

(2) 求二面角 $B-AP-M$ 的平面角的余弦值.

6. (2023·天津和平·统考一模) 在如图所示的几何体中, $EA \perp$ 平面 $ABC, DB \perp$ 平面 ABC ; $AC \perp BC, AC=BC=BD=2AE=2, M$ 是 AB 的中点.

(1) 求证: $CM \perp EM$;

(2) 求直线 EM 与平面 CDE 所成角的正弦值;

(3) 求平面 CME 与平面 CDE 的夹角的余弦值.

高频考点二: 空间角的向量求法

角度 1: 用传统法求异面直线所成角

典型例题

例题 1. (2023·河北·模拟预测) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 为 BD 的中点, 点 F 为 B_1C_1 的中点, 则直线 BF 与 D_1E 所成角的正弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

C.

D. $\frac{1}{2}$

例题 2. (2023·甘肃定西·统考模拟预测) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AB=3, AD=PA=4, E$ 是棱 BC 上一点, 则当截面 PDE 的周长最短时, PE 与 AB 所成角的余弦值等于_____.

例题 3. (2023·河北·校联考一模) 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, 且 $BD = 3AC$, 点 E, F 分别为 AD, BC 的中点, 则异面直线 AC 与 BD 所成角的大小为_____, AC 与 EF 所成角的余弦值为_____.

角度 2: 用向量法求异面直线所成角

典型例题

例题 1. (2023·河南安阳·统考三模) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle VABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$, P 是线段 A_1B_1 上的动点, 则当线段 CP 最短时, 异面直线 AC_1 与 BP 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{7\sqrt{10}}{30}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{6}$ C. $\frac{7\sqrt{10}}{25}$ D.

例题 2. (2023·山东·烟台二中校联考模拟预测) 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, 平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 $CC_1M = l$, 则直线 l 与 D_1M 所成角的余弦值为_____.

角度 3: 用向量法解决线面角的问题 (定值+探索性问题 (最值, 求参数))

典型例题

例题 1. (2023·河南·校联考模拟预测) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 BC, CD 的中点.

- (1) 求证: $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ;
- (2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.

例题 2. (2023·广东深圳·统考模拟预测) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 如图 E, F 分别是 BB_1, CD 的中点.

- (1) 求证: 平面 $AD_1F \perp$ 平面 ADE ;

(2) 求直线 EF 与 AD_1F 所成角的正弦值.

例题 3. (2023 · 山东德州 · 三模) 图 1 是直角梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, $AB = 2$, $CD = 3$, 四边形 $ABCE$ 为平行四边形, 以 BE 为折痕将 $VBCE$ 折起, 使点 C 到达 C_1 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$, 如图 2.

(1) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$;

(2) 在线段 BE 上存在点 P 使得 PA 与平面 ABC_1 的正弦值为 $\sqrt{\frac{3}{65}}$, 求平面 BAC_1 与 PAC_1 所成角的余弦值.

例题 4. (2023 · 湖北襄阳 · 襄阳四中校考模拟预测) 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 若已知 $PA \perp BC$, $PB \perp AC$, 点 P 在底面 ABC 的射影为点 H , 则

(1) 证明: $PC \perp AB$

(2) 设 $PH = HA = HB = HC = 2$, 则在线段 PC 上是否存在一点 M , 使得 BM 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$,

若存在, 设 $\frac{CM}{CP} = \lambda$, 求出 λ 的值, 若不存在, 请说明理由.

角度 4: 用向量法解决二面角的问题 (定值+探索性问题 (最值, 求参数))

典型例题

例题 1. (2023 · 河北沧州 · 校考模拟预测) 如图, 在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB_1 \perp A_1C$, AB_1 的中点为 O , BC 的中点为 D .

(1) 证明: $OD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;

(2) 若 $\angle ACB = 90^\circ$, $AB_1 = B_1C$, $AC = 2BC = 4$, 求平面 ACC_1A_1 与平面 ABC 所成角的大小.

例题 2. (2023 · 重庆万州 · 重庆市万州第三中学校考模拟预测) 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, 点 E, F 分别是棱 BC, DC 的中点, $CD \perp$ 平面 AEF .

(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ;

(2) 过点 B 作 CD 的平行线交 FE 的延长线于点 M , 点 G 是线段 BD 上的动点, 问: 点 G 在何处时, 平面 AEG 与平面 ABM 夹角的正弦值最小, 并求出该最小正弦值.

例题 3. (2023 · 广东佛山 · 统考模拟预测) 如图 1, 菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 向上翻折, 得到如图 2 所示三棱锥 $A'-BCD$.

(1) 证明: $A'C \perp BD$;

(2) 若 $A'C = 3$, 在线段 BD 上是否存在点 G , 使得平面 $A'CG$ 与平面 BCD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$? 若存在, 求出 BG ; 若不存在, 请说明理由.

例题 4. (2023 秋 · 福建三明 · 高三统考期末) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形, 四边形 AA_1B_1B 为菱形, $AC \perp BC$, $AC = 4$, $BC = 3$.

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 ACB_1 ;

(2) 线段 CC_1 上是否存在一点 E , 使得平面 AB_1E 与平面 ABC 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$? 若存在, 求出点 E 的位置; 若不存在, 请说明理由.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/567050005026006163>