

重难点突破 01 抽象函数模型归纳总结

目录

01 方法技巧与总结	2
02 题型归纳总结	3
题型一：一次函数模型	3
题型二：二次函数模型	5
题型三：幂函数模型	7
题型四：指数函数模型	8
题型五：对数函数模型	10
题型六：正弦函数模型	13
题型七：余弦函数模型	15
题型八：正切函数模型	18
03 过关测试	20

01

// 方法技巧与总结 //

一次函数

(1) 对于正比例函数 $f(x) = kx (k \neq 0)$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y)$ 。

(2) 对于一次函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x \pm y) = f(x) \pm f(y) + mb$ 。

二次函数

(3) 对于二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，与其对应的抽象函数为

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2axy - c$$

幂函数

(4) 对于幂函数 $f(x) = x^n$ ，与其对应的抽象函数为 $f(xy) = f(x)f(y)$ 。

(5) 对于幂函数 $f(x) = x^n$ ，其抽象函数还可以是 $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ 。

指数函数

(6) 对于指数函数 $f(x) = a^x$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 。

(7) 对于指数函数 $f(x) = a^x$ ，其抽象函数还可以是 $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ 。

其中 $(a > 0, a \neq 1)$

对数函数

(8) 对于对数函数 $f(x) = \log_a x$ ，与其对应的抽象函数为 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 。

(9) 对于对数函数 $f(x) = \log_a x$ ，其抽象函数还可以是 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ 。

(10) 对于对数函数 $f(x) = \log_a x$ ，其抽象函数还可以是 $f(x^n) = nf(x)$ 。

其中 $(a > 0, a \neq 1)$

三角函数

(11) 对于正弦函数 $f(x) = \sin x$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$

注：此抽象函数对应于正弦平方差公式： $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$

(12) 对于余弦函数 $f(x) = \cos x$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$

注：此抽象函数对应于余弦和差化积公式： $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(13) 对于余弦函数 $f(x) = \cos x$ ，其抽象函数还可以是 $f(x)f(y) = \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)]$

注：此抽象函数对应于余弦积化和差公式： $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

(14) 对于正切函数 $f(x) = \tan x$ ，与其对应的抽象函数为 $f(x \pm y) = \frac{f(x) \pm f(y)}{1 \mp f(x)f(y)}$

注：此抽象函数对应于正切函数和差角公式： $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

02 // 题型归纳与总结 //

题型一：一次函数模型

【例1】已知 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ 且 $f(1) = 2$ ，则 $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ 不等于

- A. $f(1) + 2f(1) + \dots + nf(1) - \frac{n(n-1)}{2}$ B. $f\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n - 1$
C. $\frac{n^2 + 3n}{2}$ D. $n(n+1)$

【答案】D

【解析】由 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$ ， $\therefore f(x+y) - 1 = [f(x) - 1] + [f(y) - 1]$ ，

构造函数 $g(x) = f(x) - 1$ ，则 $g(x+y) = g(x) + g(y)$ ，且 $g(1) = f(1) - 1 = 1$ ，

令 $a_n = g(n) = f(n) - 1$ ，则 $a_1 = f(1) - 1 = 1$ ，

令 $x = n$ ， $y = 1$ ，得 $g(n+1) = g(n) + g(1)$ ，

$\therefore a_{n+1} = a_n + a_1 = a_n + 1$ ，即 $a_{n+1} - a_n = 1$ ，

所以，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且首项为1，公差为1， $\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$ ，

$\therefore f(n) - 1 = n$ ，则 $f(n) = n + 1$ 。

$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{n(2+n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2}$ ，

$f(1) + 2f(1) + \dots + nf(1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}f(1) - \frac{n(n-1)}{2} = n(n+1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2}$ ，合乎题意；

$$f\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n - 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}, \text{ 合乎题意;}$$

故选 D.

【变式 1-1】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ，若 $f(x+y) + f(x)f(y) = 4xy$ ，则下列结论错误的是 ()

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

C. 函数 $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. 函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 是减函数

【答案】C

【解析】对于 A，令 $x = \frac{1}{2}$ 、 $y = 0$ ，则有 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)[1 + f(0)] = 0$ ，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ，故 $1 + f(0) = 0$ ，即 $f(0) = -1$ ，

令 $x = \frac{1}{2}$ 、 $y = -\frac{1}{2}$ ，则有 $f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ ，

即 $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ ，由 $f(0) = -1$ ，可得 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ，故 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ，故 A 正确；

对于 C，令 $y = -\frac{1}{2}$ ，则有 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) + f(x)f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$ ，

则 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2x$ ，故函数 $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 是奇函数，故 C 错误；

对于 D，有 $f\left(x + 1 - \frac{1}{2}\right) = -2(x+1) = -2x - 2$ ，即 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = -2x - 2$ ，

则函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 是减函数，故 D 正确；

对于 B，由 $f\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2x$ ，令 $x = 1$ ，有 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times 1 = -2$ ，故 B 正确.

故选：C

【变式 1-2】(2024·河南新乡·一模) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ，

$f(2xy - 1) = f(x) \cdot f(y) + f(y) + 2x - 3$ ， $f(0) = -1$ ，则不等式 $f(x) > 3 - 2^x$ 的解集为 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-\infty, -1)$

【答案】A

【解析】令 $x = y = 0$ ，得 $f(-1) = f(0) \cdot f(0) + f(0) - 3 = -3$ 。

令 $y = 0$ ，得 $f(-1) = f(x)f(0) + f(0) + 2x - 3$ ，解得 $f(x) = 2x - 1$ ，

则不等式 $f(x) > 3 - 2^x$ 转化为 $2x + 2^x - 4 > 0$ ，

因为 $y = 2x + 2^x - 4$ 是增函数，且 $2 \times 1 + 2^1 - 4 = 0$ ，

所以不等式 $f(x) > 3 - 2^x$ 的解集为 $(1, +\infty)$ 。

故选：A

【变式 1-3】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ ，其值域也是 $\mathbf{R}$ ，并且对于任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ ，都有

$f(xf(y)) = xy$ ，则 $|f(2022)|$ 等于 ()

A. 0

B. 1

C. 2022^2

D. 2022

【答案】D

【解析】由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调，且值域为 $\mathbf{R}$ ，则必存在 $y_0 \in \mathbf{R}$ ，使得 $f(y_0) = 1$ ，

令 $y = y_0$ 得， $f(xf(y_0)) = xy_0$ ，即 $f(x) = y_0x$ ，

于是 $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ， $f(xf(y)) = f(xy_0y) = y_0(xy_0y) = y_0^2xy = xy$ ，则 $y_0 = \pm 1$ ，

从而 $f(x) = \pm x$ ，有 $|f(2022)| = 2022$ 。

故选：D

题型二：二次函数模型

【例 2】(2024 · 高三 · 河北保定 · 期末) 已知函数 $f(x)$ 满足： $\forall x, y \in \mathbf{Z}$ ，

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1$ 成立，且 $f(-2) = 1$ ，则 $f(2n) (n \in \mathbf{N}^*) =$ ()

A. $4n+6$

B. $8n-1$

C. $4n^2 + 2n - 1$

D. $8n^2 + 2n - 5$

【答案】C

【解析】令 $x = y = 0$ ，则 $f(0) = f(0) + f(0) + 1$ ，所以 $f(0) = -1$ ，

令 $x = y = -1$ ，则 $f(-2) = f(-1) + f(-1) + 2 + 1 = 2f(-1) + 3 = 1$ ，

所以 $f(-1) = -1$ ，

令 $x = 1, y = -1$ ，则 $f(0) = f(1) + f(-1) - 2 + 1 = f(1) - 2 = -1$ ，所以 $f(1) = 1$ ，

令 $x = n, y = 1, n \in \mathbf{N}^*$ ，则 $f(n+1) = f(n) + f(1) + 2n + 1 = f(n) + 2n + 2$ ，

所以 $f(n+1) - f(n) = 2n + 2$ ，

则当 $n \geq 2$ 时， $f(n) - f(n-1) = 2n$ ，

则 $f(n) = f(n) - f(n-1) + f(n-1) - f(n-2) + \dots + f(2) - f(1) + f(1)$

$$= 2n + (2n-2) + 1 + 4 + 1 = \frac{(2n+4)(n-1)}{2} + 1 = n^2 + n - 1,$$

当 $n=1$ 时, 上式也成立,

$$\text{所以 } f(n) = n^2 + n - 1 (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } f(2n) = 4n^2 + 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

故选: C.

【变式 2-1】 (2024 · 山东济南 · 三模) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $yf(x) - xf(y) = xy(x-y)$, 则下列结论一定成立的是 ()

A. $f(1)=1$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. $f(x)$ 有最小值

D. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增

【答案】C

【解析】 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $yf(x) - xf(y) = xy(x-y)$,

$$\text{令 } y=1, \text{ 则 } f(x) - xf(1) = x(x-1), \text{ 得 } f(x) = x^2 + [f(1)-1]x,$$

$x=1$ 时, $f(1) = 1^2 + [f(1)-1]$ 恒成立, 无法确定 $f(1)=1$, A 不一定成立;

由于 $f(1)=1$ 不一定成立, 故 $f(x) = x^2 + [f(1)-1]x$ 不一定为偶函数, B 不确定;

由于 $f(x) = x^2 + [f(1)-1]x$ 的对称轴为 $x = -\frac{1}{2} \cdot [f(1)-1]$ 与 $[0,1]$ 的位置关系不确定,

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一定单调递增, D 也不确定,

由于 $f(x) = x^2 + [f(1)-1]x$ 表示开口向上的抛物线, 故函数 $f(x)$ 必有最小值, C 正确,

故选: C

【变式 2-2】 (2024 · 陕西西安 · 模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x) + f(y) = f(x+y) - 2xy + 2, f(1) = 2$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(4)=12$

B. 方程 $f(x)=x$ 有解

C. $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

D. $f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是偶函数

【答案】C

【解析】 对于 A, 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x) + f(y) = f(x+y) - 2xy + 2, f(1) = 2$,

取 $x=y=1$, 得 $f(1) + f(1) = f(2) - 2 + 2$, 则 $f(2) = 4$,

取 $x=y=2$, 得 $f(2) + f(2) = f(4) - 8 + 2$, 则 $f(4) = 14$, 故 A 错误;

对于 B, 取 $y=1$, 得 $f(x) + f(1) = f(x+1) - 2x + 2$, 则 $f(x+1) - f(x) = 2x$,

所以 $f(x) - f(x-1) = 2(x-1), f(x-1) - f(x-2) = 2(x-2), \dots, f(2) - f(1) = 2$,

以上各式相加得 $f(x) - f(1) = \frac{[2(x-1)+2] \cdot (x-1)}{2} = x^2 - x$,

所以 $f(x) = x^2 - x + 2$,

令 $f(x) = x^2 - x + 2 = x$, 得 $x^2 - 2x + 2 = 0$, 此方程无解, 故 B 错误.

对于 CD, 由 B 知 $f(x) = x^2 - x + 2$,

所以 $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right) + 2 = x^2 + \frac{7}{4}$ 是偶函数,

$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2 = x^2 - 2x + \frac{11}{4}$ 不是偶函数, 故 C 正确, D 错误.

故选: C.

【变式 2-3】(2024 · 河南 · 三模) 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(1) \geq 3$, 且 $\forall x, y \in \mathbf{R}$,

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$, 则 $\sum_{i=1}^9 f(i)$ 的最小值是 ()

A. 135

B. 395

C. 855

D. 990

【答案】C

【解析】由 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$, 得 $f(x+y) - 3(x+y)^2 = f(x) - 3x^2 + f(y) - 3y^2$, 令

$g(x) = f(x) - 3x^2$, 得 $g(x+y) = g(x) + g(y)$,

令 $x = n, y = 1$, 得 $g(n+1) - g(n) = g(1)$,

故 $g(n) = [g(n) - g(n-1)] + [g(n-1) - g(n-2)] + \cdots + [g(2) - g(1)] + g(1) = ng(1)$, 又 $g(n) = f(n) - 3n^2$,

所以 $f(n) = g(n) + 3n^2 = 3n^2 + [f(1) - 3]n$,

所以 $\sum_{i=1}^9 f(i) = 3 \sum_{i=1}^9 i^2 + [f(1) - 3] \sum_{i=1}^9 i = 855 + 45[f(1) - 3]$, 因为 $f(1) \geq 3$, 当 $f(1) = 3$ 时, $\sum_{i=1}^9 f(i)$ 的最小值为 855.

故选: C.

题型三: 幂函数模型

【例 3】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $xf(x) = (y+1)f(y+1)$, 则 ()

A. $f(x) \geq 0$

B. $f(1) = 1$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 没有极值点

【答案】D

【解析】令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g(y+1) = (y+1)f(y+1)$,

所以 $g(x) = g(y+1)$, 且 $x, y+1$ 为定义域内任意值, 故 $g(x)$ 为常函数.

令 $g(x)=k$ ，则 $f(x)=\frac{k}{x}$ ，为奇函数且没有极值点，C 错，D 对；

所以 $f(x)\geq 0$ 不恒成立， $f(1)=1$ 不一定成立，A、B 错.

故选：D

【变式 3-1】(2024·河北·模拟预测) 已知定义在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$f(xy)=\frac{f(-x)}{y}+\frac{f(-y)}{x}+\frac{1}{xy}, \text{ 则 } (\quad)$$

A. $f(x)$ 是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 是奇函数且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 是偶函数且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增

【答案】A

【解析】令 $x=y=-1$ ，则 $f(1)=-2f(1)+1$ ，所以 $f(1)=\frac{1}{3}$ ，

令 $x=y=1$ ，则 $f(1)=2f(-1)+1$ ，所以 $f(-1)=-\frac{1}{3}$ ，

令 $y=-1$ ，则 $f(-x)=-f(-x)+\frac{f(1)}{x}-\frac{1}{x}=-f(-x)+\frac{1}{3x}-\frac{1}{x}=-f(-x)-\frac{2}{3x}$ ，

所以 $f(-x)=-\frac{1}{3x}$ ，

令 $y=1$ ，则 $f(x)=f(-x)+\frac{f(-1)}{x}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3x}$ ，所以 $f(x)=\frac{1}{3x}$ ，

因为 $f(-x)=-\frac{1}{3x}=-f(x)$ ，且定义域关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，

由反比例函数的单调性可得函数 $f(x)=\frac{1}{3x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

故选：A.

题型四：指数函数模型

【例 4】(多选题) (2024·山西晋中·三模) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，满足

$f(x+y)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)$ ，且 $f(0)\neq -1$ ， $f(1)>-1$ ，则下列说法正确的是 ()

A. $f(0)=0$

B. $f(x)$ 为非奇非偶函数

C. 若 $f(1)=1$ ，则 $f(4)=15$

D. $f(x)>-1$ 对任意 $x\in\mathbf{N}^*$ 恒成立

【答案】ACD

【解析】我们有恒等式： $f(x+y)+1=f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1)$.

对于 A，由恒等式可得 $f(0)+1=(f(0)+1)(f(0)+1)$ ，而 $f(0) \neq -1$ ，故 $f(0)+1 \neq 0$ ，所以 $1=f(0)+1$ ，即 $f(0)=0$ ，故 A 正确；

对于 B，由于 $f(x)=0$ 满足条件且是偶函数，所以 $f(x)$ 有可能是偶函数，故 B 错误；

对于 C，由恒等式可得 $f(x+1)+1=(f(x)+1)(f(1)+1)$ ，故

$$f(4)+1=(f(3)+1)(f(1)+1)=(f(2)+1)(f(1)+1)^2=(f(1)+1)^4.$$

若 $f(1)=1$ ，则 $f(4)=(f(1)+1)^4-1=2^4-1=15$ ，故 C 正确；

对于 D，由恒等式可得 $f(x+1)+1=(f(x)+1)(f(1)+1)$.

而 $f(1)+1>0$ ，故 $f(x+1)+1$ 和 $f(x)+1$ 同号（同为正数，或同为负数，或同为 0），

从而再由 $f(1)+1>0$ 可知 $f(x)+1>0(x \in \mathbf{N}^*)$ ，即 $f(x)>-1(x \in \mathbf{N}^*)$ ，故 D 正确.

故选：ACD.

【变式 4-1】已知函数 $f(x)$ 满足， $f(p+q)=f(p) \cdot f(q)$ ， $f(1)=3$ ，则

$$\frac{f^2(1)+f(2)}{f(1)} + \frac{f^2(2)+f(4)}{f(3)} + \frac{f^2(3)+f(6)}{f(5)} + \frac{f^2(4)+f(8)}{f(7)} + \frac{f^2(5)+f(10)}{f(9)}$$
 的值为 ()

A. 15

B. 30

C. 60

D. 75

【答案】B

【解析】Q $f(p+q)=f(p) \cdot f(q)$ ， $\therefore f(n+1)=f(n) \cdot f(1)$ ，Q $f(1)=3 \therefore f(n+1)=3f(n)$

$$\therefore f(n)=3 \times 3^{n-1}=3^n$$

$$\text{因此 } \frac{f^2(1)+f(2)}{f(1)} + \frac{f^2(2)+f(4)}{f(3)} + \frac{f^2(3)+f(6)}{f(5)} + \frac{f^2(4)+f(8)}{f(7)} + \frac{f^2(5)+f(10)}{f(9)}$$

$$= \frac{3^2+3^2}{3} + \frac{3^4+3^4}{3^3} + \frac{3^6+3^6}{3^5} + \frac{3^8+3^8}{3^7} + \frac{3^{10}+3^{10}}{3^9}$$

$$=6+6+6+6+6=30$$

故选：B

【变式 4-2】如果 $f(a+b)=f(a)f(b)$ 且 $f(1)=2$ ，则 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} =$ ()

A. $\frac{12}{5}$

B. $\frac{37}{5}$

C. 6

D. 8

【答案】C

【解析】Q $f(1)=2$ ， $f(a+b)=f(a)f(b)$ ，

$$\therefore f(2)=f(1)f(1)，f(4)=f(3)f(1)，f(6)=f(5)f(1)，$$

$$\therefore \frac{f(2)}{f(1)} = f(1), \quad \frac{f(4)}{f(3)} = f(1), \quad \frac{f(6)}{f(5)} = f(1),$$

$$\therefore \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \frac{f(6)}{f(5)} = 3f(1) = 6,$$

故选：C.

【变式 4-3】已知函数 $f(x)$ 对一切实数 a, b 满足 $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ ，且 $f(1) = 2$ ，若

$$a_n = \frac{[f(n)]^2 + f(2n)}{f(2n-1)} (n \in \mathbb{N}^*), \text{ 则数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 ()}$$

A. n

B. $2n$

C. $4n$

D. $8n$

【答案】C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 对一切实数 a, b 满足 $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ ，且 $f(1) = 2$

$$\therefore f(n+1) = f(n) \cdot f(1) = 2f(n)$$

$\therefore$ 数列 $\{f(n)\}$ 是等比数列，首项为 2，公比为 2

$$\therefore f(n) = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{[f(n)]^2 + f(2n)}{f(2n-1)} = \frac{2^{2n} + 2^{2n}}{2^{2n-1}} = 4$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $4n$.

故选：C.

题型五：对数函数模型

【例 5】(多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，则 ().

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案】ABC

【解析】方法一：

$$\text{因为 } f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y),$$

对于 A，令 $x = y = 0$ ， $f(0) = 0f(0) + 0f(0) = 0$ ，故 A 正确.

对于 B，令 $x = y = 1$ ， $f(1) = 1f(1) + 1f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，故 B 正确.

对于 C，令 $x = y = -1$ ， $f(1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1)$ ，则 $f(-1) = 0$ ，

$$\text{令 } y = -1, f(-x) = f(x) + x^2 f(-1) = f(x),$$

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于 D, 不妨令 $f(x)=0$, 显然符合题设条件, 此时 $f(x)$ 无极值, 故 D 错误.

方法二:

因为 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,

对于 A, 令 $x=y=0$, $f(0)=0f(0)+0f(0)=0$, 故 A 正确.

对于 B, 令 $x=y=1$, $f(1)=1f(1)+1f(1)$, 则 $f(1)=0$, 故 B 正确.

对于 C, 令 $x=y=-1$, $f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$, 则 $f(-1)=0$,

令 $y=-1$, $f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$,

又函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 故 C 正确,

对于 D, 当 $x^2y^2 \neq 0$ 时, 对 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ 两边同时除以 x^2y^2 , 得到 $\frac{f(xy)}{x^2y^2}=\frac{f(x)}{x^2}+\frac{f(y)}{y^2}$,

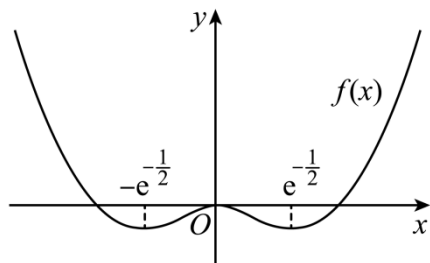
故可以设 $\frac{f(x)}{x^2}=\ln|x|(x \neq 0)$, 则 $f(x)=\begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2 \ln x$, 则 $f'(x)=2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$,

令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$; 令 $f'(x)>0$, 得 $x>e^{-\frac{1}{2}}$;

故 $f(x)$ 在 $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增,

因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\infty, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减,



显然, 此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值, 故 D 错误.

故选: ABC.

【变式 5-1】 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(xy)+1=f(x)+f(y)$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 则 $f(2^{11})=$

()

A. 1

B. 11

C. 12

D. -1

【答案】C

【解析】 令 $x=y=1$, 则 $f(1)+1=f(1)+f(1)$, 解得 $f(1)=1$,

令 $x=2, y=\frac{1}{2}$, 则 $f(1)+1=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$, 解得 $f(2)=2$,

令 $x = y = 2$ ，则 $f(2^2) + 1 = f(2) + f(2)$ ，解得 $f(2^2) = 3$ ，

令 $x = 2^2, y = 2$ ，则 $f(2^3) + 1 = f(2^2) + f(2)$ ，解得 $f(2^3) = 4$ ，

.....，

依次类推可得 $f(2^{11}) = 12$ 。

故选：C

【变式 5-2】(2024 · 四川凉山 · 三模) 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上且不恒为零的函数，若对 $\forall x, y \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ 成立，则下列说法中正确的有 () 个。

① $f(0) = f(1) = 0$ ；

② 若当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增；

③ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $f(x^n) = nx^{n-1}f(x)$ ；

④ 若 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ，则 $\sum_{i=1}^n \frac{f(2^i)}{i} = 2^n - 2$ 。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】令 $x = y = 0$ 有 $f(0) = 0$ ，令 $x = y = 1$ 有 $f(1) = 0$ 。所以①正确。

$0 < x_1 < x_2$ ，因为 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，所以 $g(xy) = \frac{f(xy)}{xy} = \frac{xf(y) + yf(x)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y} = g(x) + g(y)$ ，

所以 $g(x_2) = g\left(x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}\right) = g(x_1) + g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ，又因为 $\frac{x_2}{x_1} > 1$ ，且当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ ，

所以 $g(x_2) - g(x_1) = g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{x_2}{x_1}} > 0$ 。所以②正确。

当 $x = 0$ 时由①可得③成立；

当 $x \neq 0$ 时，由②得 $g(x^n) = g(x) + g(x^{n-1})$ ，所以 $g(x) = g(x^n) - g(x^{n-1})$ ，

所以 $g(x) = g(x^n) - g(x^{n-1}) = g(x^{n-1}) - g(x^{n-2}) = \dots = g(x^2) - g(x)$ ，

累加得 $g(x^n) = g(x) + (n-1)g(x) = ng(x)$ ，即 $\frac{f(x^n)}{x^n} = n \frac{f(x)}{x}$ ，所以 $f(x^n) = nx^{n-1}f(x)$ ，所以③正确。

令 $x = \frac{1}{2}$ ， $y = 2$ ，由①得 $\frac{1}{2}f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$ ，又因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ ，所以 $f(2) = 2$ ，

由③得 $\frac{f(x^n)}{n} = x^{n-1}f(x)$ ，所以 $\frac{f(2^n)}{n} = 2^{n-1}f(2) = 2^n$ ，

所以 $\sum_{i=1}^n \frac{f(2^i)}{i} = \sum_{i=1}^n 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 2$ ，所以④错误。

故选：C

【变式 5-3】(2024 · 山西 · 一模) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\{x | x \neq 0\}$ 上不恒为零的函数，若

$$f(xy) = \frac{f(x)}{y^2} + \frac{f(y)}{x^2}, \text{ 则 ()}$$

A. $f(1)=1$

B. $f(-1)=1$

C. $f(x)$ 为偶函数

D. $f(x)$ 为奇函数

【答案】C

【解析】令 $x=y=1$ ，则 $f(1)=2f(1)$ ，故 $f(1)=0$ ，A 选项错误；

令 $x=y=-1$ ，则 $f(1)=2f(-1)$ ，故 $f(-1)=0$ ，B 选项错误；

令 $y=-1$ ，则 $f(-x) = f(x) + \frac{f(-1)}{x^2} = f(x)$ ，故 $f(x)$ 为偶函数，C 选项正确；

因为 $f(x)$ 为偶函数，又函数 $f(x)$ 是定义在 $\{x | x \neq 0\}$ 上不恒为零的函数，D 选项错误。

故选：C

题型六：正弦函数模型

【例 6】(多选题) (2024 · 辽宁 · 模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且

$$f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y), f(1)=2, f(2)=0, \text{ 则下列说法中正确的是 ()}$$

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(3)=-2$

C. $f(-1)=f(5)$

D. $\sum_{k=2}^{2024} f(k) = -2$

【答案】BD

【解析】令 $x=y=0$ ，则 $f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$ 。

另令 $x=0$ ，则 $f(y)f(-y) = -f^2(y)$ ，由 $f(1)=2$ ，所以 $f(y) \equiv 0$ 不成立，

所以 $f(-y) = -f(y)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，故 A 错误；

令 $x=2, y=1$ ，则 $f(3)f(1) = f^2(2) - f^2(1) \Rightarrow f(3) = -2$ ，故 B 正确；

令 $x=3, y=2$ ，则 $f(5)f(1) = f^2(3) - f^2(2) \Rightarrow f(5) = 2$ ，

又 $f(-1) = -f(1) = -2$ ，所以 $f(-1) = -f(5)$ ，故 C 错；

令 $y=2$ 得 $f(x+2)f(x-2) = f^2(x) - f^2(2) = f^2(x)$ 。且 $f(1)=2, f(3)=-2, f(5)=2$ 。

所以 $f(7)f(3) = f^2(5) \Rightarrow f(7) = -2$ ； $f(9)f(5) = f^2(7) \Rightarrow f(9) = 2$ ； $f(11)f(7) = f^2(9) \Rightarrow f(11) = -2$

L

所以 $f(2k+1)=(-1)^k \times 2$ ，又 $f(0)=0$ ， $f(2)=2$ ，

所以 $f(6)f(2)=f^2(4) \Rightarrow f(4)=0$ ； $f(8)f(4)=f^2(6) \Rightarrow f(6)=0$ L

所以 $f(2k)=0$ ；

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)=L =$

$f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)+f(4k+4)=0$

所以 $\sum_{k=2}^{2024} f(k) = \sum_{k=1}^{2024} f(k) - f(1) = 0 - f(1) = -2$ ，故 D 正确.

故选：BD

【变式 6-1】(多选题) (2024·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$, $f(1)=1, f(2)=0$ ，则下列说法中正确的是 ()

- A. $f(x)$ 为偶函数 B. $f(3)=-1$ C. $f(-1)=-f(5)$ D. $\sum_{k=1}^{2023} f(k)=1$

【答案】BC

【解析】方法一：先介绍正弦平方差公式： $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$.

证明过程如下：

$$\begin{aligned} \sin^2 A - \sin^2 B &= (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) \\ &= \left(\sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) \right) \cdot \left(\sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) \right) \\ &= \left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \right) \left(2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \right) \\ &= \left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \right) \left(2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \right) \\ &= \sin(A+B)\sin(A-B). \end{aligned}$$

由题意，可以令 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ ，因为 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ 为奇函数，故选项 A 错误.

因为 $f(3)=-1$ ，故选项 B 正确.

因为 $f(-1)=-1=-f(5)$ ，故选项 C 正确.

因为 $T=4, 2023 \div 4 = 505 \text{ L } 3$ ，故 $\sum_{k=1}^{2023} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) = 0$ ，故选项 D 错误.

方法二：对于选项 A，因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

令 $x=y=0$ ，则 $f(0)f(0)=f^2(0)-f^2(0)$ ，故 $f^2(0)=0$ ，则 $f(0)=0$ ，

令 $x=0$ ，则 $f(y)f(-y)=f^2(0)-f^2(y)$ ，

又 $f(y)$ 不恒为 0，故 $f(-y)=-f(y)$ ，

所以 $f(x)$ 为奇函数，故 A 错误.

对于选项 B, 令 $x=2, y=1$, 则 $f(3)f(1)=f^2(2)-f^2(1)$.

而 $f(1)=1, f(2)=0$, 所以 $f(3)=-1$, 故选项 B 正确.

对于选项 C, 由选项 B 可知, $f(3)=-1$,

令 $x=3, y=2$, 则 $f(5)f(1)=f^2(3)-f^2(2)$, 所以 $f(5)=1$.

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(-1)=-f(1)=-1$, 故 C 正确.

对于选项 D, 由选项 B 以及 $f(x+2)f(x-2)=f^2(x)$, 可得 $f(7)=-1, f(9)=1, f(11)=-1$,

所以 $f(2k+1)=(-1)^k$, 同理可得 $f(2k)=0$.

因为 $2023 \div 4 = 505 \text{ L } 3$, 故 $\sum_{k=1}^{2023} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) = 0$, 故 D 错误.

故选: BC

题型七: 余弦函数模型

【例 7】(多选题) 已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x) \cdot f(y) - f(2-x)f(2-y)$, 且 $f(0) \neq 0, f(-2)=0$, 则 ()

A. $f(2)=1$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $[f(x)]^2 + [f(2+x)]^2 = 1$

D. $f(1)+f(2)+f(3)+\text{L}+f(2024)=1$

【答案】BC

【解析】A. $f(x+y)=f(x) \cdot f(y) - f(2-x)f(2-y)$,

令 $x=0, y=2$, 则 $f(2)=f(0) \cdot f(2) - f(2) \cdot f(0)=0$, 故 A 错误;

令 $x=y=0$, 则 $f(0)=f(0) \cdot f(0) - f(2) \cdot f(2)=f(0) \cdot f(0)$, 又 $f(0) \neq 0$, 所以 $f(0)=1$,

令 $y=2$, 则 $f(x+2)=f(x) \cdot f(2) - f(2-x) \cdot f(0)=-f(2-x)$,

所以函数 $f(x)$ 关于 $(2,0)$ 对称,

令 $x=y=2$, 则 $f(4)=f(2) \cdot f(2) - f(0) \cdot f(0)=-1$,

令 $y=4$, 且 $f(-2)=0$, 则 $f(x+4)=f(x) \cdot f(4) - f(2-x) \cdot f(-2)=-f(x)=-f(-x)$, 所以 $f(x)=f(-x)$,

又函数 $f(x)$ 的定义域 $\mathbb{R}$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 正确;

令 $y=-x$, 则 $f(0)=f(x) \cdot f(-x) - f(2-x) \cdot f(2+x)$,

又 $f(0)=1, f(x)=f(-x), f(x+2)=-f(2-x)$, 所以 $[f(x)]^2 + [f(2+x)]^2 = 1$, 故 C 正确;

因为 $f(x+4) = -f(x)$ ，所以 $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 8，

令 $x=2, y=1$ ，则 $f(3) = f(2) \cdot f(1) - f(0) \cdot f(1) = -f(1)$ ，所以 $f(3) + f(1) = 0$ ，

所以 $f(-3) + f(-1) = 0$ ，所以 $f(5) + f(7) = f(-3) + f(-1) = 0$ ，

$f(6) = f(-2) = f(2) = 0, f(8) = f(0) = 1$ ，

所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$

$= [f(1) + f(3)] + [f(5) + f(7)] + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) = 0 + 0 + 0 - 1 + 0 + 1 = 0$ ，

所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) = 253 \times [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(8)] = 0$ ，故 D 错误.

故选：BC

【变式 7-1】(多选题) (2024 · 辽宁 · 二模) 已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ ，满足

$f(x+y) = f(x)f(y) - f(1-x)f(1-y)$ ，且 $f(0) \neq 0$ ， $f(-1) = 0$ ，则 ()

A. $f(1) = 0$

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $[f(x)]^2 + [f(1+x)]^2 = 1$

D. $\sum_{i=1}^{2024} f(i) = -1$

【答案】ABC

【解析】对于 A 项，由 $f(x+y) = f(x)f(y) - f(1-x)f(1-y)$ ，

令 $x=y=\frac{1}{2}$ ，则 $f(1) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 - \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 0$ ，故 A 项正确；

对于 B 项，令 $x=y=0$ ，则 $f(0) = [f(0)]^2 - [f(1)]^2 = [f(0)]^2$ ，

因 $f(0) \neq 0$ ，故 $f(0) = 1$ ，

令 $y=1$ ，则 $f(x+1) = f(x)f(1) - f(1-x)f(0) = -f(1-x)$ ①，

所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 成中心对称，

令 $x=y=1$ ，则 $f(2) = [f(1)]^2 - [f(0)]^2 = -1$ ，

令 $y=2$ ，则 $f(x+2) = f(x)f(2) - f(1-x)f(-1) = -f(x)$ ②，

由①可得： $f(x+2) = -f(-x)$ ③，由②③可知： $f(-x) = f(x)$ ，

且函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，则函数 $f(x)$ 是偶函数，故 B 项正确；

对于 C 项，令 $y=-x$ ，则 $f(0) = f(x)f(-x) - f(1-x)f(1+x)$ ，

因为 $f(0) = 1$ ， $f(-x) = f(x)$ ， $f(x+1) = -f(1-x)$ ，代入上式中得，

故得： $[f(x)]^2 + [f(1+x)]^2 = 1$ ，故 C 项正确；

对于 D 项，由上可知： $f(x+2) = -f(x)$ ，则 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/567055054106006154>