

甘肃省秦安一中 2025 届高三第二次联考数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

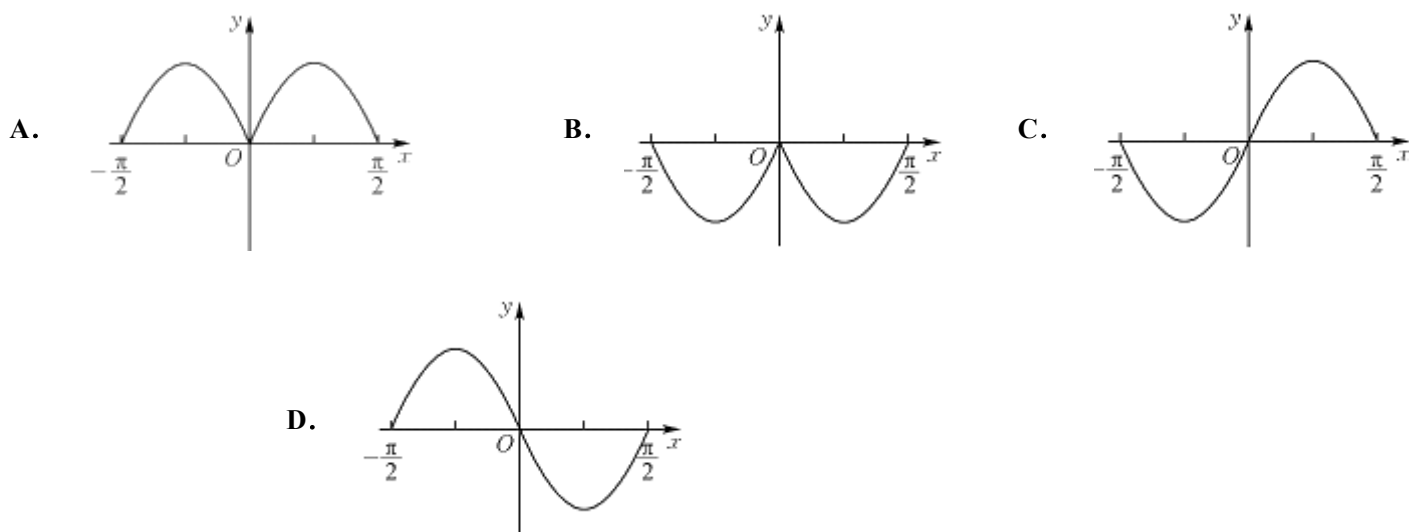
1. 甲乙两人有三个不同的学习小组 A ， B ， C 可以参加，若每人必须参加并且仅能参加一个学习小组，则两人参加同一个小组的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

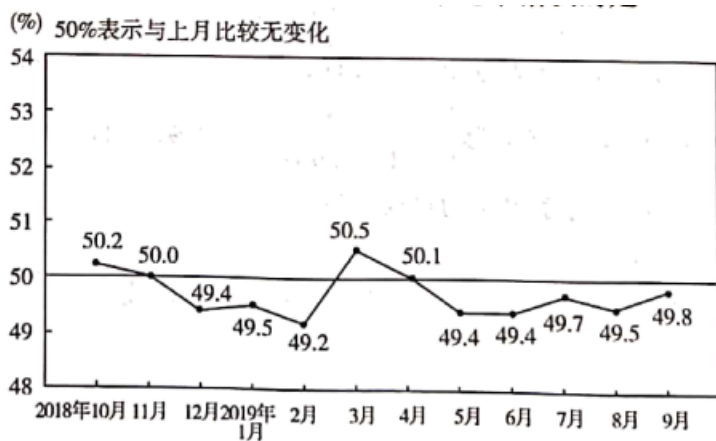
2. 若集合 $A = \{x | x(x-2) > 0\}$ ， $B = \{x | x-1 > 0\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | x > 2\}$ D. $\{x | x > 1\}$

3. 函数 $f(x) = \frac{x \cos x}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为（ ）



4. 国家统计局服务业调查中心和中国物流与采购联合会发布的 2018 年 10 月份至 2019 年 9 月份共 12 个月的中国制造业采购经理指数(PMI)如下图所示.则下列结论中错误的是（ ）



A. 12个月的PMI值不低于50%的频率为 $\frac{1}{3}$

B. 12个月的PMI值的平均值低于50%

C. 12个月的PMI值的众数为49.4%

D. 12个月的PMI值的中位数为50.3%

5. 已知命题 $p: \forall x > 0, \ln(x+1) > 0$; 命题 q : 若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$, 下列命题为真命题的是 ()

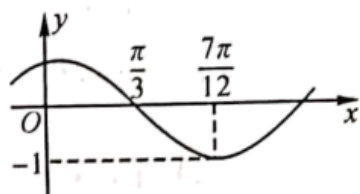
A. $p \wedge q$

B. $p \wedge \neg q$

C. $\neg p \wedge q$

D. $\neg p \wedge \neg q$

6. $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象如图所示, $g(x) = -A \sin(\omega x - \varphi)$, 若将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 a ($a > 0$) 个单位长度后所得图象与 $y = g(x)$ 的图象重合, 则 a 可取的值为 ()



A. $\frac{1}{12}\pi$

B. $\frac{5}{12}\pi$

C. $\frac{7}{12}\pi$

D. $\frac{11}{12}\pi$

7. 若直线 $2x + 4y + m = 0$ 经过抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点, 则 $m =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 2

D. -2

8. 设命题 p : 函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 在 R 上递增, 命题 q : 在 $\triangle ABC$ 中, $A > B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$, 下列为真命题的是 ()

A. $p \wedge q$

B. $p \vee (\neg q)$

C. $(\neg p) \wedge q$

D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

9. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y \leq 0 \\ x + 2y - 6 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x^2 + y^2$ 的最大值等于 ()

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. 8

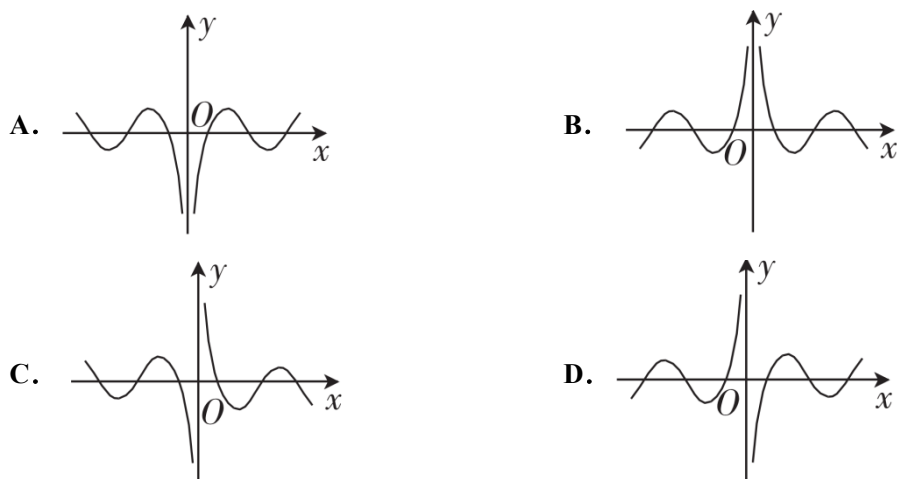
10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$, 若 c 为最大边, 则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $(1, \sqrt{3}]$

11. 阿基米德 (公元前 287 年—公元前 212 年), 伟大的古希腊哲学家、数学家和物理学家, 他死后的墓碑上刻着一个“圆柱容球”的立体几何图形, 为纪念他发现“圆柱内切球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$, 且球的表面积也是圆柱表面积的 $\frac{2}{3}$ ”这一完美的结论. 已知某圆柱的轴截面为正方形, 其表面积为 24π , 则该圆柱的内切球体积为 ()

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. 16π C. $\frac{16}{3}\pi$ D. $\frac{32}{3}\pi$

12. 函数 $f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1}$ 的图象大致是 ()



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $a = \log_2 3, b = \log_3 2$, 则 $ab =$ _____, $\lg a + \lg b =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}, BC = 1, \angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $AC =$ _____.

15. 某中学数学竞赛培训班共有 10 人, 分为甲、乙两个小组, 在一次阶段测试中两个小组成绩的茎叶图如图所示, 若甲组 5 名同学成绩的平均数为 81, 乙组 5 名同学成绩的中位数为 73, 则 $x - y$ 的值为 _____.

甲				乙
		6	7	
7	2	7	0	y
6	x	8	5	
0		9	1	

16. $(1-3x)(1+x)^5$ 展开式中 x^3 项的系数是 _____

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知 $f(x) = x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - k \ln x - 1$ ($k \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 求 k 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 判断函数 $f(x)$ 零点的个数.

18. (12分) 设 $k \in \mathbf{R}$, 函数 $g(x) = k(x - e)$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$.

①若 $k = -1$, 试判断函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在区间 $(1, \sqrt{e})$ 上是否有交点;

②求证: 对任意的 $k \in \mathbf{R}$, 直线 $y = g(x)$ 都不是 $y = f(x)$ 的切线;

(2) 设函数 $h(x) = 2x - x \ln x + xg(x) - ekx$, 试判断函数 $h(x)$ 是否存在极小值, 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

19. (12分) 某艺术品公司欲生产一款迎新春工艺礼品, 该礼品是由玻璃球面和该球的内接圆锥组成, 圆锥的侧面用于艺术装饰, 如图 1. 为了便于设计, 可将该礼品看成是由圆 O 及其内接等腰三角形 ABC 绕底边 BC 上的高所在直线 AO 旋转 180° 而成, 如图 2. 已知圆 O 的半径为 10cm , 设 $\angle BAO = \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 圆锥的侧面积为 $S\text{cm}^2$.

(1) 求 S 关于 θ 的函数关系式;

(2) 为了达到最佳观赏效果, 要求圆锥的侧面积 S 最大. 求 S 取得最大值时腰 AB 的长度.

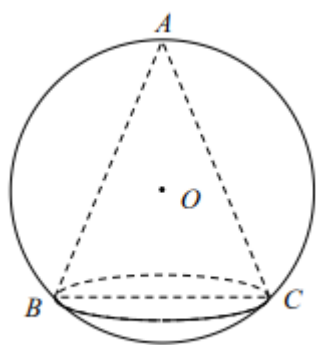


图 1

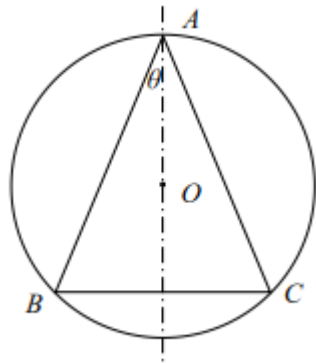


图 2

20. (12分) 已知 $a > 0, b > 0, a + b = 2$.

(I) 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1}$ 的最小值;

(II) 证明: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \frac{2}{ab}$.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x$ ($a \in \mathbf{R}$), 函数 $g(x) = -2x + 3$.

(I) 判断函数 $F(x) = f(x) + \frac{1}{2}ag(x)$ 的单调性;

(II) 若 $-2 \leq a \leq -1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in [1, 2]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq t |g(x_1) - g(x_2)|$ 恒成立, 求实数 t 的最小值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + \lambda \left(\frac{1}{x} - x \right) (\lambda \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $x > 1$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 λ 的最小值;

(2) 设数列 $a_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 其前 n 项和为 S_n , 证明: $S_{2n} - S_n + \frac{a_n}{4} > \ln 2$.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】依题意, 基本事件的总数有 $3 \times 3 = 9$ 种, 两个人参加同一个小组, 方法数有 3 种, 故概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2、C

【解析】

解一元二次不等式得 $A = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < 0\}$, 利用集合的交集运算求得 $A \cap B = \{x | x > 2\}$.

【详解】

因为 $A = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < 0\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 所以 $A \cap B = \{x | x > 2\}$, 故选 C.

【点睛】

本题考查集合的交运算, 属于容易题.

3、C

【解析】

根据函数的奇偶性及函数在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时的符号, 即可求解.

【详解】

由 $f(-x) = -\frac{x \cos x}{2^x + 2^{-x}} = -f(x)$ 可知函数 $f(x)$ 为奇函数.

所以函数图象关于原点对称, 排除选项 A, B;

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$,

$$\therefore f(x) = \frac{x \cos x}{2^x + 2^{-x}} > 0, \text{ 排除选项 } D,$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了函数的奇偶性的判定及奇偶函数图像的对称性，属于中档题.

4、D

【解析】

根据图形中的信息，可得频率、平均值的估计、众数、中位数，从而得到答案.

【详解】

对 A，从图中数据变化看，PMI 值不低于 50% 的月份有 4 个，所以 12 个月的 PMI 值不低于 50% 的频率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ，

故 A 正确；

对 B，由图可以看出，PMI 值的平均值低于 50%，故 B 正确；

对 C，12 个月的 PMI 值的众数为 49.4%，故 C 正确；

对 D，12 个月的 PMI 值的中位数为 49.6%，故 D 错误

故选：D.

【点睛】

本题考查频率、平均值的估计、众数、中位数计算，考查数据处理能力，属于基础题.

5、B

【解析】

解：命题 p： $\forall x > 0, \ln(x+1) > 0$ ，则命题 p 为真命题，则 $\neg p$ 为假命题；

取 $a = -1, b = -2, a > b$ ，但 $a^2 < b^2$ ，则命题 q 是假命题，则 $\neg q$ 是真命题.

$\therefore p \wedge q$ 是假命题， $p \wedge \neg q$ 是真命题， $\neg p \wedge q$ 是假命题， $\neg p \wedge \neg q$ 是假命题.

故选 B.

6、B

【解析】

根据图象求得函数 $y = f(x)$ 的解析式，即可得出函数 $y = g(x)$ 的解析式，然后求出变换后的函数解析式，结合题意可得出关于 a 的等式，即可得出结果.

【详解】

由图象可得 $A = 1$ ，函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $T = 4 \times \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} \right) = \pi$ ， $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

$$\text{Q } f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \varphi\right) = -1,$$

$$\text{则 } \frac{7\pi}{6} + \varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \therefore \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 取 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 则 } g(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\therefore g(x) = f(x+a) = \cos\left(2x + 2a - \frac{\pi}{6}\right), \quad 2a - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ 可得 } a = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{当 } k=0 \text{ 时, } a = \frac{5\pi}{12}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查利用图象求函数解析式，同时也考查了利用函数图象变换求参数，考查计算能力，属于中等题.

7、B

【解析】

计算抛物线的交点为 $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ ，代入计算得到答案.

【详解】

$$y = 2x^2 \text{ 可化为 } x^2 = \frac{1}{2}y, \text{ 焦点坐标为 } \left(0, \frac{1}{8}\right), \text{ 故 } m = -\frac{1}{2}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查了抛物线的焦点，属于简单题.

8、C

【解析】

命题 P ：函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，即可判断出真假. 命题 Q ：在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦函数单调性判断出真假.

【详解】

解：命题 P ：函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ ，所以 $f'(x) = e^x - e^{-x}$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，即函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，因此是假命题.

命题 Q ：在 $\triangle ABC$ 中， $A, B \in (0, \pi)$ ， $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减，所以 $A > B \Leftrightarrow \cos A < \cos B$ ，是真命题.

则下列命题为真命题的是 $(\neg p) \wedge q$.

故选：C.

【点睛】

本题考查了函数的单调性、正弦定理、三角形边角大小关系、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

9、D

【解析】

画出可行域，计算出原点到可行域上的点的最大距离，由此求得 z 的最大值.

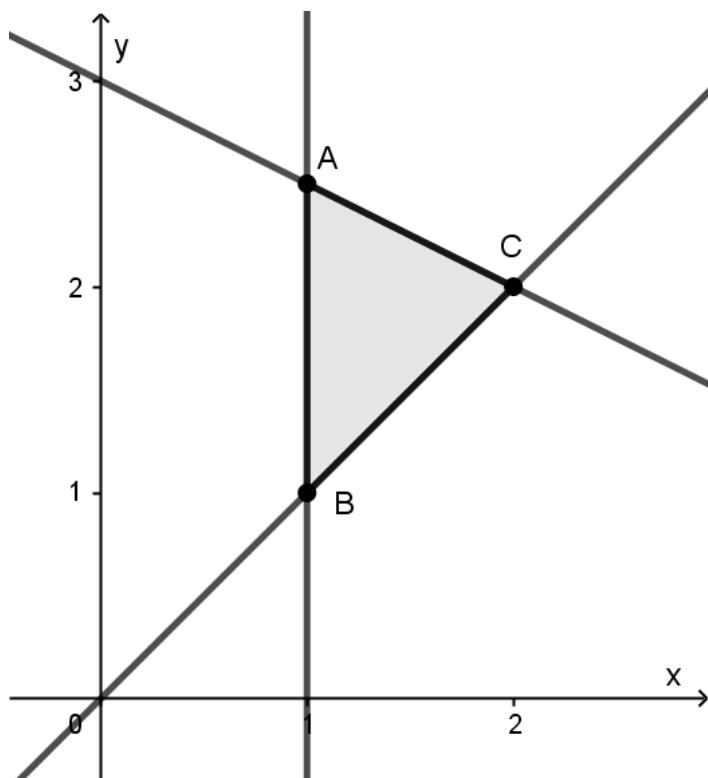
【详解】

画出可行域如下图所示，其中 $A\left(1, \frac{5}{2}\right), C(2, 2)$ ，由于 $|OA| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}, |OC| = 2\sqrt{2}$ ，所以 $|OC| > |OA|$ ，

所以原点到可行域上的点的最大距离为 $2\sqrt{2}$.

所以 z 的最大值为 $(2\sqrt{2})^2 = 8$.

故选：D



【点睛】

本小题主要考查根据可行域求非线性目标函数的最值，考查数形结合的数学思想方法，属于基础题.

10、C

【解析】

由 $\frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2}{a^2+b^2} = 2c^2$ ，化简得到 $\cos C$ 的值，根据余弦定理和基本不等式，即可求解.

【详解】

由 $\frac{a^4+b^4+c^4+a^2b^2}{a^2+b^2} = 2c^2$ ，可得 $\frac{(a^2+b^2)^2+c^4-a^2b^2}{a^2+b^2} = 2c^2$ ，

可得 $a^2+b^2-c^2 = \frac{c^2(a^2+b^2-c^2)+a^2b^2}{a^2+b^2}$ ，

通分得 $\frac{(a^2+b^2-c^2)(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2}{a^2+b^2} = 0$ ，

整理得 $(a^2+b^2-c^2)^2 = a^2b^2$ ，所以 $(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2 = \frac{1}{4}$ ，

因为 C 为三角形的最大角，所以 $\cos C = -\frac{1}{2}$ ，

又由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab$

$\geq (a+b)^2 - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2$ ，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

所以 $c > \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$ ，即 $\frac{a+b}{c} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

又由 $a+b > c$ ，所以 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了代数式的化简，余弦定理，以及基本不等式的综合应用，试题难度较大，属于中档试题，着重考查了推理与运算能力.

11、D

【解析】

设圆柱的底面半径为 r ，则其母线长为 $l = 2r$ ，由圆柱的表面积求出 r ，代入圆柱的体积公式求出其体积，结合题中的结论即可求出该圆柱的内切球体积.

【详解】

设圆柱的底面半径为 r ，则其母线长为 $l = 2r$ ，

因为圆柱的表面积公式为 $S_{\text{圆柱表}} = 2\pi r^2 + 2\pi rl$ ，

所以 $2\pi r^2 + 2\pi r \times 2r = 24\pi$, 解得 $r = 2$,

因为圆柱的体积公式为 $V_{\text{圆柱}} = Sh = \pi r^2 \cdot 2r$,

所以 $V_{\text{圆柱}} = \pi \times 2 \times 2^3 = 16\pi$,

由题知,圆柱内切球的体积是圆柱体积的 $\frac{2}{3}$,

所以所求圆柱内切球的体积为

$$V = \frac{2}{3} V_{\text{圆柱}} = \frac{2}{3} \times 16\pi = \frac{32\pi}{3}.$$

故选:D

【点睛】

本题考查圆柱的轴截面及表面积和体积公式;考查运算求解能力;熟练掌握圆柱的表面积和体积公式是求解本题的关键;属于中档题.

12、C

【解析】

根据函数奇偶性可排除 AB 选项;结合特殊值,即可排除 D 选项.

【详解】

$$\because f(x) = \cos 2x + \frac{2\cos 2x}{2^x - 1} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x,$$

$$f(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \times \cos(-2x) = -\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \times \cos 2x = -f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数,

$\therefore$ 排除选项 A, B;

又 $\because$ 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f(x) > 0$,

故选: C.

【点睛】

本题考查了依据函数解析式选择函数图象,注意奇偶性及特殊值的用法,属于基础题.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13、1 0

【解析】

①根据换底公式计算即可得解;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/567116054034010044>