山西省太原市第五中学2024年学业水平考试数学试题模拟卷(十一)

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2．答题时请按要求用笔。

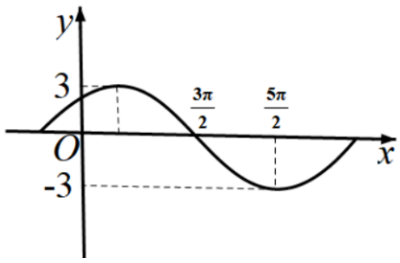
3．请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4．作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5．保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（其中 $A>0$，$\omega>0$，$\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$）的图象如图，则此函数表达式为（　　）



A. $f\left(x\right)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　**B.** $f\left(x\right)=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

C. $f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　**D.** $f\left(x\right)=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

2．已知 $a=\log_3\sqrt{2}$，$b=\ln 3$，$c=2^{-0.99}$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $b>c>a$　　**B.** $a>b>c$　　**C.** $c>a>b$　　**D.** $c>b>a$

3．已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，F_1，F_2 为其左、右焦点，直线 l 过右焦点 F_2，与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点，且点 A 在 x 轴上方，若 $\left|AF_2\right|=3\left|BF_2\right|$，则直线 l 的斜率为(　)

A. 1　　**B.** -2　　**C.** -1　　**D.** 2

4．已知直线 l：$kx-y-3k+1=0$ 与椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A、B 两点，与圆 C_2：$\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$ 交于 C、D 两点.若存在 $k\in\left[-2,-1\right]$，使得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，则椭圆 C_1 的离心率的取值范围为（　）

A. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$　　**B.** $[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)$　　**C.** $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　　**D.** $[\dfrac{\sqrt{6}}{3},1)$

5．若复数 $z=(m+1)+\left(2-m\right)i(m\in R)$ 是纯虚数，则 $\left|\dfrac{6+3i}{z}\right|=$(　　)

A．3　　B．5　　C．$\sqrt{5}$　　D．$3\sqrt{5}$

6．已知复数 z 满足 $i\bullet z=2+i$，则 z 的共轭复数是（）

A．﹣1﹣2i　　B．﹣1+2i　　C．1﹣2i　　D．1+2i

7．已知奇函数 $f\left(x\right)$ 是 R 上的减函数，若 m,n 满足不等式组 $\begin{cases} f(m)+f(n-2)\geq 0 \\ f(m-n-1)\geq 0 \\ f(m)\leq 0 \end{cases}$，则 $2m-n$ 的最小值为（　　）

A．-4　　B．-2　　C．0　　D．4

8．正 ΔABC 的边长为 2，将它沿 BC 边上的高 AD 翻折，使点 B 与点 C 间的距离为 $\sqrt{3}$，此时四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为（　　）

A．$\dfrac{10\pi}{3}$　　B．4π　　C．$\dfrac{13\pi}{3}$　　D．7π

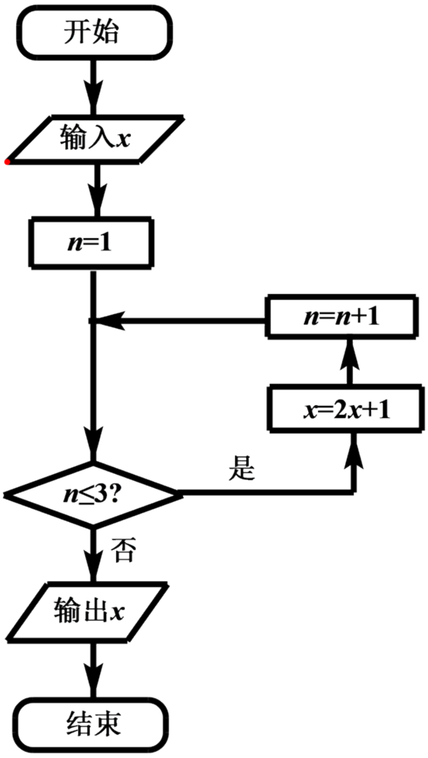
9．从装有除颜色外完全相同的 3 个白球和 m 个黑球的布袋中随机摸取一球，有放回的摸取 5 次，设摸得白球数为 X，已知 $E(X)=3$，则 $D(X)=($　　$)$

A．$\dfrac{8}{5}$　　B．$\dfrac{6}{5}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

10．在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $A\left(1,2\right)$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 到点 B，设直线 OB 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 α，则 $cos\alpha$ 等于(　　)

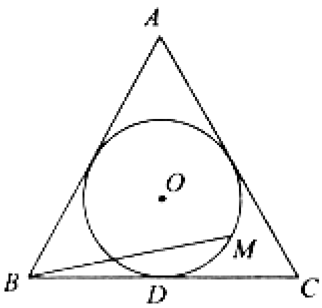
A．$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\dfrac{2}{5}$

11．当输入的实数 $x\in\left[2,30\right]$ 时，执行如图所示的程序框图，则输出的 x 不小于 103 的概率是（　　）



A．$\dfrac{9}{14}$　　B．$\dfrac{5}{14}$　　C．$\dfrac{3}{7}$　　D．$\dfrac{9}{28}$

12．如图，圆O是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形ABC的内切圆，其与BC边相切于点D，点M为圆上任意一点，$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则$2x+y$的最大值为（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，且已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$60°$，$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则$|\vec{c}|$的最小值是__.

14．平面直角坐标系中,O为坐标原点,已知A(3,1),B(-1,3),若点C满足$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$,其中α,β∈R,且α+β=1,则点C的轨迹方程为____

15．在编号为1，2，3，4，5且大小和形状均相同的五张卡片中，一次随机抽取其中的三张，则抽取的三张卡片编号之和是偶数的概率为________.

16．已知函数 $f\left(x\right)$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(4-x\right)=f\left(x\right)$，且周期为2，当 $x\in\left[-3,-2\right]$ 时，$f\left(x\right)=\left(x+2\right)^{2}$，则 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=$________________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）已知函数 $f(x)=(x-a)^{2}-2x\ln x$，其导函数为 $f'(x)$，

（1）若 $a=0$，求不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）证明：对任意的 $0<s<t<2$，恒有 $\dfrac{f'(s)-f'(t)}{s-t}<1$.

18．（12分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x+1}+\ln\left(x+1\right),a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

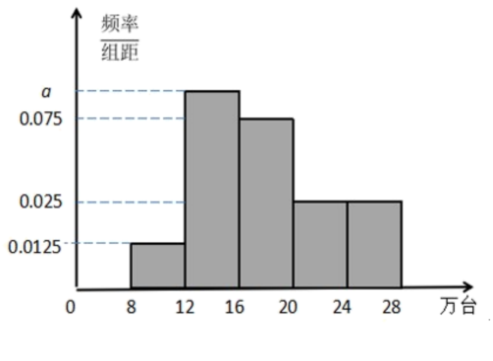
（2）函数 $g(x)=x^{2}+\dfrac{2}{x}$，若对于 $\forall x_{1}\in\left(-1,+\infty\right),\exists x_{2}\in\left[1,2\right]$，使得 $f\left(x_{1}\right)\geq g\left(x_{2}\right)$ 成立，求 a 的取值范围.

19．（12分）已知顶点是坐标原点的抛物线 Γ 的焦点 F 在 y 轴正半轴上，圆心在直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 上的圆 E 与 x 轴相切，且 E，F 关于点 $M\left(-1,0\right)$ 对称.

（1）求 E 和 Γ 的标准方程；

（2）过点 M 的直线 l 与 E 交于 A，B，与 Γ 交于 C，D，求证：$\left|CD\right|>\sqrt{2}\left|AB\right|$.

20．（12分）秉持“绿水青山就是金山银山”的生态文明发展理念，为推动新能源汽车产业迅速发展，有必要调查研究新能源汽车市场的生产与销售.下图是我国某地区2016年至2019年新能源汽车的销量（单位：万台）按季度（一年四个季度）统计制成的频率分布直方图.

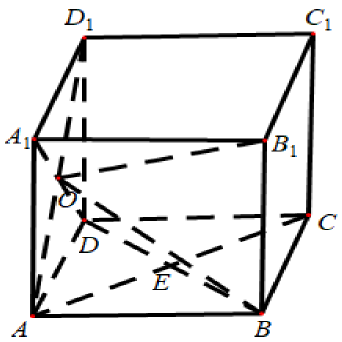


（1）求直方图中 a 的值，并估计销量的中位数；

（2）请根据频率分布直方图估计新能源汽车平均每个季度的销售量（同一组数据用该组中间值代表），并以此预计2020年的销售量.

21．（12分）如图，在直棱柱 $ABCD-A_{1}B_{1}C_{1}D_{1}$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=BD=2$，$BB_{1}=2$，BD 与 AC

相交于点E，A_1D与AD_1相交于点O.



（1）求证：$AC \perp$平面BB_1D_1D；

（2）求直线OB与平面OB_1D_1所成的角的正弦值.

22.（10分）已知点P在抛物线C：$x^2 = 2py\left(p>0\right)$上，且点$P$的横坐标为2，以$P$为圆心，$\left|PO\right|$为半径的圆（$O$为原点），与抛物线$C$的准线交于$M$，$N$两点，且$\left|MN\right| = 2$.

（1）求抛物线C的方程；

（2）若抛物线的准线与y轴的交点为H. 过抛物线焦点F的直线l与抛物线C交于A,B,且$AB \perp HB$，求$\left|AF\right| - \left|BF\right|$的值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由图象的顶点坐标求出A，由周期求出ω，通过图象经过点$\left(\dfrac{3\pi}{2},0\right)$，求出$\varphi$，从而得出函数解析式.

【详解】

解：由图象知$A=3$，$T = 4\left(\dfrac{5\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 4\pi$，则$\omega = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$，

图中的点$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$应对应正弦曲线中的点$(\pi,0)$，

所以$\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2}+\varphi=\pi$，解得$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

故函数表达式为$f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

故选：**B.**

【点睛】

本题主要考查三角函数图象及性质，三角函数的解析式等基础知识；考查考生的化归与转化思想，数形结合思想，属于基础题.

2、**A**

【解析】

根据指数函数与对数函数的单调性，借助特殊值即可比较大小.

【详解】

因为$\log_3\sqrt{2}<\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，

所以$a<\frac{1}{2}$.

因为3＞e，

所以$b=\ln 3>\ln e=1$，

因为$0>-0.99>-1$，$y=2^x$为增函数，

所以$\frac{1}{2}<c=2^{-0.99}<1$

所以$b>c>a$，

故选：***A*.**

【点睛】

本题主要考查了指数函数、对数函数的单调性，利用单调性比较大小，属于中档题.

3、**D**

【解析】

由**|AF$_2$|＝3|BF$_2$|**，可得$\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$.设直线**l**的方程**x＝my+**$\sqrt{5}$，**m＞0**，设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，即**$y_1$＝－ 3$y_2$**①，

联立直线**l**与曲线**C**,得**y_1+y_2＝-**$\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$②，**y_1y_2＝**$\frac{1}{m^2-4}$③，求出**m**的值即可求出直线的斜率.

【详解】

双曲线C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，F_1，F_2为左、右焦点，则F_2（$\sqrt{5}$，0），设直线l的方程x＝my+$\sqrt{5}$，m＞0，∵双曲线的渐近线方程为x＝±2y，∴m≠±2，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），且y_1＞0，由$|AF_2|$＝3$|BF_2|$，∴$\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$，∴$y_1$＝－3$y_2$①

由$\begin{cases}x=my+\sqrt{5}\\x^2-4y^2-4=0\end{cases}$，得$\left(m^2-4\right)y^2+2\sqrt{5}my+1=0$

∴Δ＝（$2\sqrt{5}$m）^{2}－4（m^2－4）＞0，即m^2+4＞0恒成立，

∴y_1+y_2＝$-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}$②，$y_1y_2$＝$\frac{1}{m^2-4}$③，

联立①②得$-2y_2=-\frac{2\sqrt{5}m}{m^2-4}>0$，联立①③得$-3y_2^2=\frac{1}{m^2-4}<0$，

$\therefore y_2=\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}$，$y_2^2=\frac{1}{12-3m^2}$即：$\frac{1}{12-3m^2}=\left(\frac{\sqrt{5}m}{m^2-4}\right)^2$，$m>0$，解得：$m=\frac{1}{2}$，直线$l$的斜率为$2$，

故选D．

【点睛】

本题考查直线与双曲线的位置关系，考查韦达定理的运用，考查向量知识，属于中档题．

4、A

【解析】

由题意可知直线过定点即为圆心，由此得到A,B坐标的关系，再根据点差法得到直线的斜率k与A,B坐标的关系，由此化简并求解出离心率的取值范围.

【详解】

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，且线$l:kx-y-3k+1=0$过定点$\left(3,1\right)$即为$C_2$的圆心，

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=x_C+x_D=2\times3=6\\y_1+y_2=y_C+y_D=2\times1=2\end{cases}$，

又因为$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$，所以$b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)=-a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)$，

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以$k=-\frac{3b^2}{a^2}\in\left[-2,-1\right]$，

所以$\frac{b^2}{a^2}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，所以$\frac{a^2-c^2}{a^2}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，所以$\left(1-e^2\right)\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，

所以$e\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

故选：A.

【点睛】

本题考查椭圆与圆的综合应用，着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用，难度一般.通过运用点差法达到“设而不求”的目的，大大简化运算.

5、C

【解析】

先由已知，求出$m=-1$，进一步可得$\frac{6+3\mathrm{i}}{z}=1-2\mathrm{i}$，再利用复数模的运算即可

【详解】

由z是纯虚数，得$m+1=0$且$2-m\neq 0$，所以$m=-1$，$z=3i$.

因此，$\left|\frac{6+3i}{z}\right|=\left|\frac{6+3i}{3i}\right|=|1-2i|=\sqrt{5}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的除法、复数模的运算，考查学生的运算能力，是一道基础题.

6、D

【解析】

两边同乘-i，化简即可得出答案.

【详解】

$i\bullet z=2+i$两边同乘-i得$z=1-2i$,共轭复数为$1+2i$，选D.

【点睛】

$z=a+bi(a,b\in R)$的共轭复数为$\overline{z}=a-bi$

7、B

【解析】

根据函数的奇偶性和单调性得到可行域，画出可行域和目标函数，根据目标函数的几何意义平移得到答案.

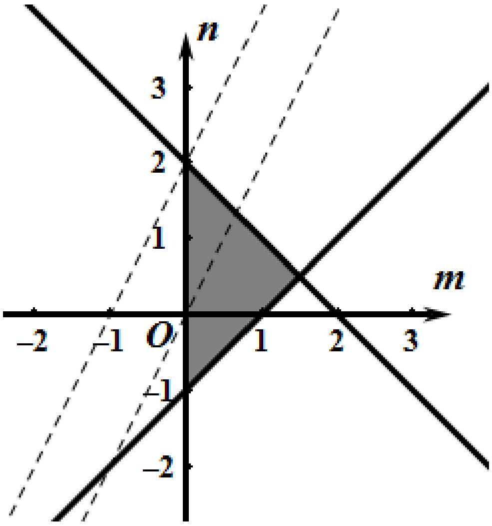
【详解】

奇函数 $f\left(x\right)$ 是 R 上的减函数，则 $f\left(0\right)=0$，且 $\begin{cases} m\le 2-n \\ m-n-1\le 0 \\ m\ge 0 \end{cases}$，画出可行域和目标函数，

$z=2m-n$，即 $n=2m-z$，z 表示直线与 y 轴截距的相反数，

根据平移得到：当直线过点 $\left(0,2\right)$，即 $m=0.n=2$ 时，$z=2m-n$ 有最小值为 -2.

故选：B.



【点睛】

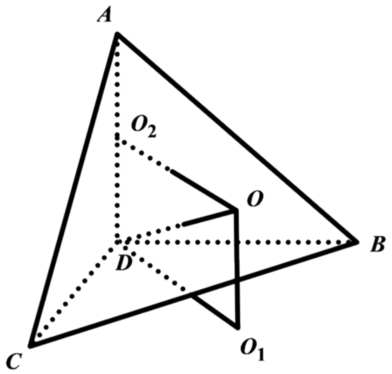
本题考查了函数的单调性和奇偶性，线性规划问题，意在考查学生的综合应用能力，画出图像是解题的关键.

8、**D**

【解析】

如图所示，设 AD 的中点为 O_2，ΔBCD 的外接圆的圆心为 O_1，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O，连接 OO_1,OO_2,OD，利用正弦定理可得 $DO_1=1$，利用球心的性质和线面垂直的性质可得四边形 OO_2DO_1 为平行四边形，最后利用勾股定理可求外接球的半径，从而可得外接球的表面积.

【详解】



如图所示，设 AD 的中点为 O_2，ΔBCD 外接圆的圆心为 O_1，四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心为 O，连接