2023-2024学年安徽省安庆市高三模拟考试数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

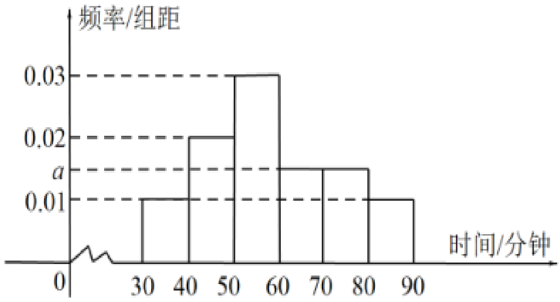
1. 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}\leqslant 0\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|\left(\frac{2}{3}\right)^{x}>1\right.\right\}$，则 $M\cap N=$(　)

A. $\varnothing$　　B. $\{x|x<0\}$　　C. $\{x|0\leqslant x<1\}$　　D. $\{x|0<x<1\}$

2. 若复数 z 满足 $i\cdot z=2022+i^{2023}$(i 是虚数单位)，z 的共轭复数是 $\overline{z}$，则 $z-\overline{z}$ 的模是(　)

A. $\sqrt{4044^2+4}$　　B. 4044　　C. 2　　D. 0

3. 为了解“双减”政策实施后学生每天的体育活动时间，研究人员随机调查了该地区 1000 名学生每天进行体育运动的时间，按照时长(单位：分钟)分成 6 组：第一组 $[30,40)$, 第二组 $[40,50)$, 第三组 $[50,60)$, 第四组 $[60,70)$, 第五组 $[70,80)$, 第六组 $[80,90]$，经整理得到如图的频率分布直方图，则可以估计该地区学生每天体育活动时间的第 25 百分位数约为(　)



A. 42.5 分钟　　B. 45.5 分钟　　C. 47.5 分钟　　D. 50 分钟

4. 已知非零向量 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 的夹角为 θ，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=2$，且 $|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\geqslant\frac{4}{3}$，则夹角 θ 的最小值为(　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知第二象限角 α 满足 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\beta-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ 的值为(　)

A. $-\frac{1}{9}$　　B. $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1^2+a_4^2=4$，则 a_2+a_3 不可能取的值是(　)

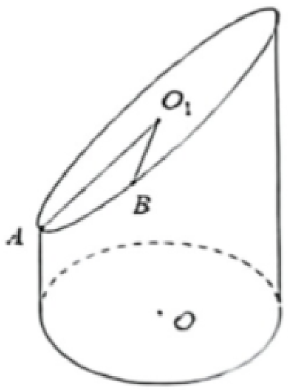
A. -3　　B. $-2\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x|\ln x|, x>0\\ -xe^{x}, x<0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-|x^2-kx|$ 恰有 3 个零点，则实数 k 的取值范围是(　)

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

8. 一底面半径为 1 的圆柱，被一个与底面成45°角的平面所截(如图)，O 为底面圆的中心，O_1为截面的中心，A 为截面上距离底面最小的点，A 到圆柱底面的距离为 1，B 为截面图形弧上的一点，且$\angle AO_1B=60^{\circ}$，则点 B 到底面的距离是(　)



A. $\dfrac{7}{4}$　　B. $\dfrac{14-2\sqrt{7}}{7}$　　C. $\dfrac{14-\sqrt{7}}{7}$　　D. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 将函数$f(x)=\sin\,\omega x+a\cos\,\omega x(a>0,\omega>0)$图象上点的横坐标缩短为原来的$\dfrac{1}{2}$倍，然后将所得图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位，得到函数$g(x)=2\cos(2x+\varphi)$的图象．则下列说法中正确的是(　)

A. 函数$f(x)$的最小正周期为2π

B. 函数$g(x)$的图象有一条对称轴为$x=-\dfrac{\pi}{12}$

C. 函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}\right](k\in Z)$

D. 函数$g(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-\sqrt{3},2]$

10. 在三棱锥$A-BCD$中，G，E，P，H 分别是$\triangle BCD$，$\triangle ACD$，$\triangle ABD$，$\triangle ABC$的重心．则下列命题中正确的有(　)

A. $GE//$平面 ABD　　B. $V_{\text{三棱锥}A-GBC}=\dfrac{1}{3}V_{\text{三棱锥}A-DBC}$

C. 四条直线 AG，BE，CP，DH 相交于一点 D. $AB=2GE$

11. 牛顿用“作切线”的方法求函数的零点时，给出了“牛顿数列”，它在航空航天中应用非常广泛．其定义是：对于函数$f(x)$和数列$\{x_n\}$，若$(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$，则称数列$\{x_n\}$为牛顿数列．已知函

数 $f(x)=x^2-4$，数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列，且 $a_n=\ln\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$， $a_1=1$， $x_n>2(n\in N^*)$，则下列结论中正确的是(　)

A. $x_1=\dfrac{2e+2}{e-1}$

B. $\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\dfrac{(x_n-2)^2}{(x_n+2)^2}$

C. $\{a_n\}$ 是等比数列

D. $a_6=32$

12. 已知 *A*、*B* 为抛物线 $y=x^2$ 上两点，以 *A*，*B* 为切点的抛物线的两条切线交于点 *P*，设以 *A*，*B* 为切点的抛物线的切线斜率为 k_A， k_B，过 *A*，*B* 的直线斜率为 k_{AB}，则以下结论正确的有(　)

A. k_A， k_{AB}， k_B 成等差数列;

B. 若点 *P* 的横坐标为 $\dfrac{1}{2}$，则 $k_{AB}=\dfrac{1}{2}$;

C. 若点 *P* 在抛物线的准线上，则 $\triangle ABP$ 不是直角三角形;

D. 若点 *P* 在直线 $y=2x-2$ 上，则直线 *AB* 恒过定点;

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 设某批产品中，甲、乙、丙三个车间生产的产品分别占 45% 、 35% 、 20% ，甲、乙车间生产的产品的次品率分别为 2% 和 3%. 现从中任取一件，若取到的是次品的概率为 2.95% ，则推测丙车间的次品率为______。

14. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 *E* 是棱 AA_1 上一点，且 $AE=1$. 过三点 *E*、B_1 、C_1 的平面截该正方体的内切球，所得截面圆面积的大小为______。

15. 已知双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$， $(a>0,b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1， F_2，过 *x* 轴上方的焦点 F_1 的直线与双曲线上支交于 *M*，*N* 两点，以 NF_2 为直径的圆经过点 *M*，若 $|MF_2|$， $|MN|$， $|NF_2|$ 成等差数列，则该双曲线的渐近线方程为______.

16. 已知函数 $f(x)=e^{ax}-ax$，其中 $a>0$，若不等式 $f'(x)\geqslant 3(x^2-\dfrac{1}{x})\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，则 *a* 的最小值为______。

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 *n* 项和为 S_n， $S_9=81$，且 a_2， a_5， a_{14} 成等比数列.

(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

(Ⅱ) 设 $b_n=\sqrt{1+\dfrac{1}{S_n}+\dfrac{1}{S_{n+1}}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 *n* 项和 T_n.

18.（本小题 12 分）

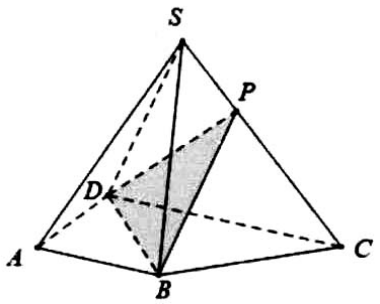
在$\triangle ABC$中，角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，$2b\sin C\cdot\tan\dfrac{A}{2}=a$.

(Ⅰ)若角$B=\dfrac{\pi}{6}$，求角 *A* 的大小；

(Ⅱ)若$a=4$，$\cos 2A=\dfrac{1}{8}$，求b.

19.（本小题 12 分）

如图,在四棱锥$S-ABCD$中,底面*ABCD*是梯形，$AB//CD$，$\angle BAD=90^\circ$，$CD=2AB=2AD=2$，侧面 *SCD* 是等边三角形，侧面 *SBC* 是等腰直角三角形，$SB=BC$.



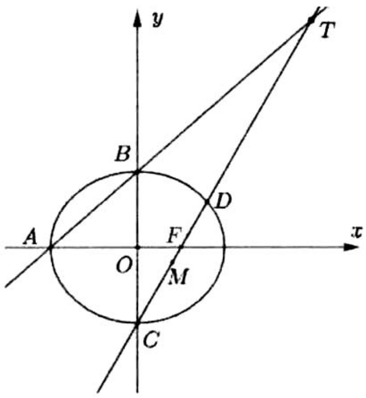
(Ⅰ)求证：$SB\perp$平面 *ABCD*；

(Ⅱ)若 *P* 是棱 *SC* 上的一点，且$SA//$平面PBD.求平面 *PBD* 与平面 *ABCD* 所成二面角的余弦值.

20.

21.（本小题 12 分）

如图，在平面直角坐标系 *xOy* 中，*A*，*B*，*C* 分别为椭圆 *E*：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的三个顶点，$F(c,0)$为其右焦点，直线 *AB* 与直线 *CF* 相交于点T.



(Ⅰ)若点 *T* 在直线 *l*：$x=\dfrac{a^2}{c}$上，求椭圆 *E* 的离心率；

(Ⅱ)设直线 *CF* 与椭圆 *E* 的另一个交点为 *D*，*M* 是线段 *CD* 的中点，椭圆 *E* 的离心率为$\dfrac{1}{2}$，试探究$\dfrac{|TM|}{|CD|}$的值是否为定值(与 *a*，*b* 无关).若为定值，求出该定值；若不为定值，请说明理由.

22.(本小题 12 分)

已知函数$f(x)=a\ln\ x+bx^2e^{1-x}$，*a*，$b\in R.e\approx 2.71828\cdots$.

(Ⅰ)若曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程是$y=x+\ln\ 2$，求 *a* 和 *b* 的值；

(Ⅱ)若$a=e$，且$f(x)$的导函数$f'(x)$恰有两个零点，求 *b* 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查集合的基本运算，属于基础题.

先化简 M，N，再利用交集的运算进行求解.

【解答】

解：$M=\{x|0\leqslant x<1\}$，$N=\{x|x<0\}$，

所以 $M\cap N=\varnothing$，

故选 A.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查复数代数形式的乘法运算，考查了共轭复数和模的概念，属基础题

由 i 的 n 次幂的周期性对复数进行化简，再结合共轭复数的定义求得 $\overline{z}$，再由模的公式求得答案

【解答】

解：$\because i\cdot z=2022-i$，

$\therefore z=-1-2022i$，

$\overline{z}=-1+2022i$，

$\therefore z-\overline{z}=-4044i$.

则 $z-\overline{z}$ 的模是 4044. 故选 B.

3.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了频率分布直方图和百分位数，是基础题.

由频率之和为 1 求出 $a=0.015$，利用求百分位数的公式进行求解.

【解答】

解：由频率之和为 1 得：$10(0.01+0.02+0.03+2a+0.01)=1$，

解得：$a=0.015$，

由 $10\times0.01=0.1<0.25$，$10\times0.01+10\times0.02=0.3>0.25$，

故第 25 百分位数位于 $[40,50)$ 内，

则第 25 百分位数为 $40+\dfrac{0.25-0.1}{0.3-0.1}\times 10=47.5$，

可以估计该地区学生每天体育活动时的第 25 百分位数约为 47.5.

故选 C.

4.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了向量的数量积运算性质、向量的夹角公式，属于中档题.

利用向量的数量积运算性质、向量的夹角公式即可得出.

【解答】

解：由 $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=4$ 有，$|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2+2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\theta=4$，

即 $4\geqslant 2|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|(1+\cos\theta)\geqslant\dfrac{8}{3}(1+\cos\theta)$，

因此 $\cos\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$，

由于 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi$，

于是夹角 θ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$.

故选 C.

5.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查两角和与差的三角函数，同角三角函数基本关系式的应用，属于基础题.

求出 $\cos\alpha=-\sqrt{1-(\dfrac{2}{3})^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，利用两角和与差的三角函数化简求解即可.

【解答】

解：由题意得 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，且 α 为第二象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-(\dfrac{2}{3})^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

于是 $\sin 2\beta-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=\sin[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=-[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)]$

$=-\sin 2\alpha$

$=-2\sin\alpha\cos\alpha$

$= -2 \times \frac{2}{3} \times (-\frac{\sqrt{5}}{3}) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$.

故选 D.

6.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查了等差数列的性质，结合三角代换求最值，是基础题.

设 $a_1 = 2\cos\theta$， $a_4 = 2\sin\theta$ 结合等差数列的性质可得 $a_2 + a_3 = a_1 + a_4 = 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$，结合正弦函数的值域可得答案.

【解答】

解：设 $a_1 = 2\cos\theta$， $a_4 = 2\sin\theta$， $\theta \in [0, 2\pi)$,

则 $a_2 + a_3 = a_1 + a_4 = 2\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$， $\theta + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4})$,

所以 $a_2 + a_3 \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

故选 A.

7.【答案】A

【解析】【分析】

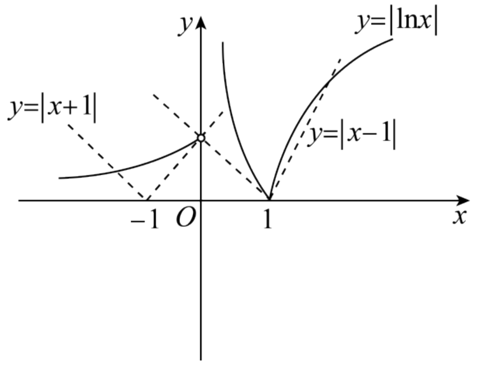
本题主要考查函数的零点问题，函数与方程的应用，数形结合思想，属于中档题.

由题可得要使 $g(x)$ 恰有 3 个零点，只需方程 $\frac{f(x)}{|x|} = |x-k|$ 恰有 3 个实根即可，作出函数 $y = \frac{f(x)}{|x|}$ 和 $y = |x-k|$ 的大致图象，利用数形结合进行求解即可.

【解答】

解：由题意得，方程 $\frac{f(x)}{|x|} = |x-k|$ 有三个不等的实数根.

$y = \frac{f(x)}{|x|} = \begin{cases} |\ln\ x|, x > 0 \\ e^x, x < 0 \end{cases}$ ，分别作出函数 $y = \frac{f(x)}{|x|}$ 和 $y = |x-k|$ 的图象，



可得 k 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

故选 A.

8.【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了点面距离和椭圆的几何性质，是中档题.

易得截面椭圆是以 O_1 为中心，A 为长轴端点的椭圆，利用解析几何知识，结合点到直线的距离，求解即可.

【解答】

解：圆柱半径为 1，截面与底边所成角为 45°，作 $AM\perp OO_1$ 于 M，

则 $\angle MAO_1=45^{\circ}$， $AO_1=\sqrt{2}$.

截面椭圆是以 O_1 为中心，A 为长轴端点的椭圆，其长轴长为 $2\sqrt{2}$，短轴长为 2，

在平面直角坐标系中，

不妨令椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，作 $BC\perp AO_1$ 于 C，因为 $AO_1B=60^{\circ}$，

则可令直线 O_1B 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以设 $B(x,\sqrt{3}x)$，

又因为 $B(x,\sqrt{3}x)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

上，解得： $x=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以 $CO_1=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$， $BO_1=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$，

过 C 作 $CD\perp OO_1$，则 $O_1D=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CO_1=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$， $OD=OO_1-O_1D=2-\dfrac{\sqrt{7}}{7}=\dfrac{14-\sqrt{7}}{7}$，

由于 BC，CD 均平行于底面，故 B 点到底面的距离是 $\dfrac{14-\sqrt{7}}{7}$.

故选 C.

9.【答案】ABD

【解析】【分析】

本题考查正弦型函数的图像变换、对称轴、对称中心、单调区间，求正弦型函数的值域，主要考查学生的运算能力和转换能力，属于中档题.

首先根据正弦型函数的伸缩平移变换，结合辅助角公式，得到 ω,φ的值，进而得到 $f(x)$， $g(x)$ 的解析式。然后根据正弦型函数或余弦型函数的图象性质，逐项判定即可。

【解答】

解：因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象振幅相等，所以 $\sqrt{1+a^2}=2$，而 $a>0$，因此 $a=\sqrt{3}$.

所以函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$. 将函数 $f(x)$ 的图象上的点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，

然后将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3}-\frac{2\omega\pi}{3})$ 的图象，

所以 $g(x)=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{3}-\frac{2\omega\pi}{3})$，由于 $\omega>0$，从而 $\omega=1$.

于是 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(2x+\varphi)$，

即 $\cos(2x-\frac{5\pi}{6})=\cos(2x+\varphi)$，

从而 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$.

因此 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，$g(x)=2\cos(2x-\frac{5\pi}{6})$，

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，*A* 正确.

令 $x=-\frac{\pi}{12}$，$g(x)=-2$，所以 $x=-\frac{\pi}{12}$ 是函数 $g(x)$ 的一条对称轴，故 *B* 正确;

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$

所以单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$，*C* 不正确.

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$2x-\frac{5\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的值域为 $[-\sqrt{3},2]$，*D* 正确.

故选 ABD.

10.【答案】*ABC*

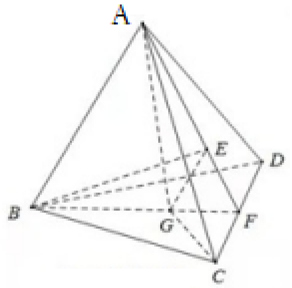
【解析】【分析】

本题考查了线面平行的判定，棱锥的体积，直线与直线的位置关系，属于中档题.

分别延长 *BG*，*AE* 交 *CD* 于中点 *F*，可得 $BG:GF=AE:EF=2:1$，故 $GE//AB$，再逐项分析即可得到答案.

【解答】

解：由于 *G*，*E* 分别是 ΔBCD，ΔACD 的重心，所以分别延长 *BG*，*AE* 交 *CD* 于中点 *F*，



因为$BG:GF=2:1$，$AE:EF=2:1$，

所以$BG:GF=AE:EF=2:1$，故$GE//AB$，

又$GE\not\subset$平面*ABD*，$AB\subset$平面*ABD*，因此$GE//$平面*ABD*，*A* 正确.

因为 *G* 是$\triangle BCD$的重心，所以$S_{\triangle GBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DBC}$，因此$V_{三棱锥A-GBC}=\dfrac{1}{3}V_{三棱锥A-DBC}$，*B* 正确.

显然线段 *AG*，*BE* 的交点 *K* 分 *AG*，*BE* 为 *BK*：$KE=AK$：$KG=3:1$，

同理线段 *CP* 和线段 *BE* 交点也是 *K*，*AG*，*DH* 的交点也是 *K*，

因此四条直线 *AG*，*BE*，*CP*，*DH* 相交于一点，*C* 正确.

因为$GE//AB$，所以$AB:GE=BF:GF=3:1$.因此$AB=3GE$，*D* 错误.

故选ABC.

11.【答案】*ACD*

【解析】【分析】

本题主要考查导数与数列的综合、等比数列的定义及基本量的计算，属于中档题.

由$a_1=1$，代入计算可判定 *A*；根据递推关系得$\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\dfrac{(x_n+2)^2}{(x_n-2)^2}$可判定 *B*；易得$a_{n+1}=2a_n$，由等比数列判定$CD$.

【解答】

解：由$a_n=\ln\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$得，$a_1=1=\ln\dfrac{x_1+2}{x_1-2}$，解得$x_1=\dfrac{2e+2}{e-1}$.

$(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0$就是$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

由$f(x)=x^2-4$得，$x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-4}{2x_n}=\dfrac{x_n^2+4}{2x_n}$.

一方面，$x_{n+1}+2=\dfrac{(x_n+2)^2}{2x_n}$.

另一方面，$x_{n+1}-2=\dfrac{(x_n-2)^2}{2x_n}$.