

2023 届福建省福清市华侨中学高三下阶段测试（五）数学试题

注意事项：

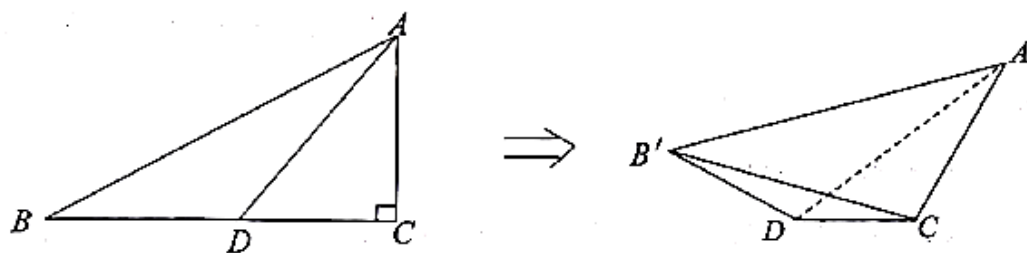
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 对两个变量进行回归分析，给出如下一组样本数据： $(0.675, -0.989)$ ， $(1.102, -0.010)$ ， $(2.899, 1.024)$ ， $(9.101, 2.978)$ ，下列函数模型中拟合较好的是（ ）

A. $y = 3x$ B. $y = 3^x$ C. $y = -(x-1)^2$ D. $y = \log_3 x$
2. 某医院拟派 2 名内科医生、3 名外科医生和 3 名护士共 8 人组成两个医疗分队，平均分到甲、乙两个村进行义务巡诊，其中每个分队都必须有内科医生、外科医生和护士，则不同的分配方案有

A. 72 种 B. 36 种 C. 24 种 D. 18 种
3. 如图， $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 2\angle B = 60^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $\angle BAD = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 旋转得到三棱锥 $B' - ADC$ ，分别记 $B'A$ ， $B'D$ 与平面 ADC 所成角为 α ， β ，则 α ， β 的大小关系是（ ）



- A. $\alpha < \beta \leq 2\alpha$ B. $2\alpha \leq \beta \leq 3\alpha$
- C. $\beta \leq 2\alpha$ ， $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$ 两种情况都存在 D. 存在某一位置使得 $\beta > 3\alpha$
4. 已知函数 $f(x) = 3x + 2\cos x$ ，若 $a = f(3^{\sqrt{2}})$ ， $b = f(2)$ ， $c = f(\log_2 7)$ ，则 a ， b ， c 的大小关系是（ ）

A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$
 5. 设 m 、 n 是两条不同的直线， α 、 β 是两个不同的平面，则 $m \perp \beta$ 的一个充分条件是（ ）

A. $\alpha \perp \beta$ 且 $m \subset \alpha$ B. $m \parallel n$ 且 $n \perp \beta$ C. $\alpha \perp \beta$ 且 $m \parallel \alpha$ D. $m \perp n$ 且 $n \parallel \beta$

6. 斜率为 1 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A、B 两点, 则 $|AB|$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

7. 已知向量 $\vec{OA} = (-3, 4)$, $\vec{OA} + \vec{OB} = (-1, 5)$, 则向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) < 2$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0]$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0)$

9. 将函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$ 图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 则所得函数图象的一个对称中心为 ()

- A. $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{3\pi}{8}, -1\right)$ C. $\left(-\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{8}, -1\right)$

10. 射线测厚技术原理公式为 $I = I_0 e^{-\rho \mu t}$, 其中 I_0, I 分别为射线穿过被测物前后的强度, e 是自然对数的底数, t 为被测物厚度, ρ 为被测物的密度, μ 是被测物对射线的吸收系数. 工业上通常用镅 241 (^{241}Am) 低能 γ 射线测量钢板的厚度. 若这种射线对钢板的半价层厚度为 0.8, 钢的密度为 7.6, 则这种射线的吸收系数为 ()

(注: 半价层厚度是指将已知射线强度减弱为一半的某种物质厚度, $\ln 2 \approx 0.6931$, 结果精确到 0.001)

- A. 0.110 B. 0.112 C. 0.114 D. 0.116

11. 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$

12. 已知 $a > 0$, $f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0)$, $A = \{x | f(x) \leq x\}$, $B = \{x | f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

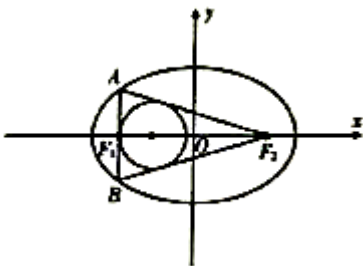
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $(2-x)^7 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_7(1+x)^7$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7 =$ ____, $a_6 =$ ____.

14. 已知非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, 且 $(\vec{b} - \vec{a}) \perp \vec{a}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

15. (5 分) 函数 $f(x) = \ln(1-x) + \sqrt{4+3x-x^2}$ 的定义域是_____.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，如图 AB 是过 F_1 且垂直于长轴的弦，则 $\triangle ABF_2$ 的内切圆方程是_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （12 分）对于很多人来说，提前消费的认识首先是源于信用卡，在那个工资不高的年代，信用卡绝对是神器，稍微大件的东西都是可以选择用信用卡来买，甚至于分期买，然后慢慢还！现在银行贷款也是很风靡的，从房贷到车贷到一般的现金贷．信用卡“忽如一夜春风来”，遍布了各大小城市的大街小巷．为了解信用卡在 A 市的使用情况，某调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中随机抽取了 100 人进行抽样分析，得到如下 2×2 列联表（单位：人）

	经常使用信用卡	偶尔或不用信用卡	合计
40 岁及以下	15	35	50
40 岁以上	20	30	50
合计	35	65	100

- （1）根据以上数据，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为 A 市使用信用卡情况与年龄有关？
- （2）①现从所抽取的 40 岁及以下的网民中，按“经常使用”与“偶尔或不用”这两种类型进行分层抽样抽取 10 人，然后，再从这 10 人中随机选出 4 人赠送积分，求选出的 4 人中至少有 3 人偶尔或不用信用卡的概率；
- ②将频率视为概率，从 A 市所有参与调查的 40 岁以上的网民中随机抽取 3 人赠送礼品，记其中经常使用信用卡的人数为 X ，求随机变量 X 的分布列、数学期望和方差．

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

18. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 直线 l 交曲线 C 于 A, B 两点, P 为 AB

中点.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和点 P 的轨迹 C_2 的极坐标方程;

(2) 若 $|AB| \cdot |OP| = \sqrt{3}$, 求 α 的值.

19. (12 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - m| - |x + 2m|$ 的最大值为 3, 其中 $m > 0$.

(1) 求 m 的值;

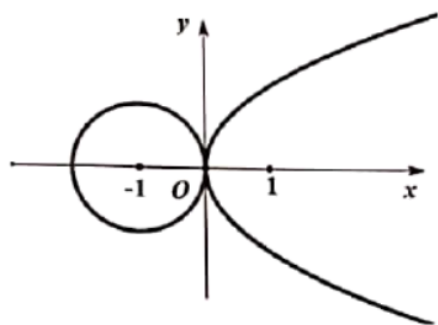
(2) 若 $a, b \in \mathbb{R}$, $ab > 0$, $a^2 + b^2 = m^2$, 求证: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} \geq 1$

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 3|$.

(I) 解不等式 $f(x) \geq 6$;

(II) 设 $g(x) = -x^2 + 2ax$, 其中 a 为常数. 若方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有两个不相等的实数根, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上横坐标为 3 的点与抛物线焦点的距离为 4.



(1) 求 p 的值;

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($0 < x_0 \leq 2$) 为抛物线 C_1 上的动点, 过 P 作圆 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线分别与 y 轴交于 A, B 两点. 求 $|AB|$ 的取值范围.

22. (10 分) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. (e 为自然对数的底数)

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过点 $(-e, -1)$, 求 x_0 的值;

(2) 若不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}ax^2 - (1-a)x - 1$ 恒成立，求正整数 a 的最小值.

参考答案

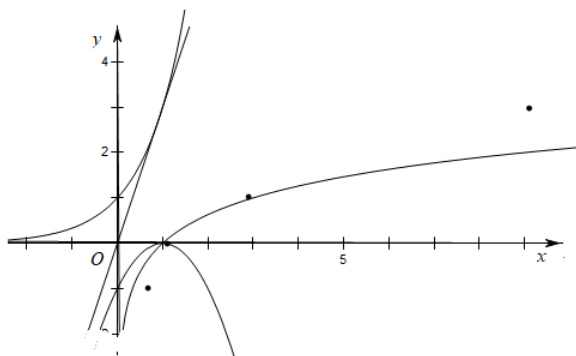
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

作出四个函数的图象及给出的四个点，观察这四个点在靠近哪个曲线.

【详解】



如图，作出 A，B，C，D 中四个函数图象，同时描出题中的四个点，它们在曲线 $y = \log_3 x$ 的两侧，与其他三个曲线都离得很远，因此 D 是正确选项，

故选：D.

【点睛】

本题考查回归分析，拟合曲线包含或靠近样本数据的点越多，说明拟合效果好.

2、B

【解析】

根据条件 2 名内科医生，每个村一名，3 名外科医生和 3 名护士，平均分成两组，则分 1 名外科，2 名护士和 2 名外科医生和 1 名护士，根据排列组合进行计算即可.

【详解】

2 名内科医生，每个村一名，有 2 种方法，

3 名外科医生和 3 名护士，平均分成两组，要求外科医生和护士都有，则分 1 名外科，2 名护士和 2 名外科医生和 1 名护士，

若甲村有 1 外科, 2 名护士, 则有 $\square_3^1 \square_3^2 = 3 \times 3 = 9$, 其余的分到乙村,

若甲村有 2 外科, 1 名护士, 则有 $\square_3^2 \square_3^1 = 3 \times 3 = 9$, 其余的分到乙村,

则总共的分配方案为 $2 \times (9+9) = 2 \times 18 = 36$ 种,

故选: B.

【点睛】

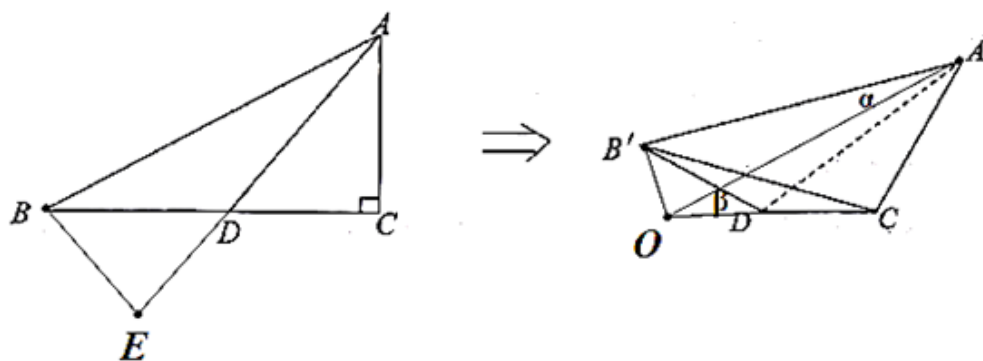
本题主要考查了分组分配问题, 解决这类问题的关键是先分组再分配, 属于常考题型.

3、A

【解析】

根据题意作出垂线段, 表示出所求得 α 、 β 角, 分别表示出其正弦值进行比较大小, 从而判断出角的大小, 即可得答案.

【详解】



由题可得过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 于点 E , 过 B' 作 CD 的垂线, 垂足为 O , 则易得 $\alpha = \angle B'AO$, $\beta = \angle B'DO$.

设 $CD = 1$, 则有 $BD = AD = 2$, $DE = 1$, $BE = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 可得 $AB' = AB = 2\sqrt{3}$, $B'D = BD = 2$.

$$\because \sin \alpha = \frac{OB'}{AB'}, \sin \beta = \frac{OB'}{DB'},$$

$$\therefore \sin \beta = \sqrt{3} \sin \alpha > \sin \alpha, \therefore \beta > \alpha;$$

$$\because OB' \in [0, \sqrt{3}], \therefore \sin \alpha \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$\because \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \in [\sqrt{3}, 2], \therefore \sin 2\alpha \dots \sqrt{3} \sin \alpha = \sin \beta,$$

$$\therefore 2\alpha \dots \beta.$$

综上可得, $\alpha < \beta, 2\alpha$.

故选: A.

【点睛】

本题考查空间直线与平面所成的角的大小关系, 考查三角函数的图象和性质, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

4、D

【解析】

根据题意, 求出函数的导数, 由函数的导数与函数单调性的关系分析可得 $f(x)$ 在 R 上为增函数, 又由

$2 = \log_2 4 < \log_2 7 < 3 < 3^{\sqrt{2}}$, 分析可得答案.

【详解】

解: 根据题意, 函数 $f(x) = 3x + 2\cos x$, 其导数函数 $f'(x) = 3 - 2\sin x$,

则有 $f'(x) = 3 - 2\sin x > 0$ 在 R 上恒成立,

则 $f(x)$ 在 R 上为增函数;

又由 $2 = \log_2 4 < \log_2 7 < 3 < 3^{\sqrt{2}}$,

则 $b < c < a$;

故选: D.

【点睛】

本题考查函数的导数与函数单调性的关系, 涉及函数单调性的性质, 属于基础题.

5、B

【解析】

由 $m // n$ 且 $n \perp \beta$ 可得 $m \perp \beta$, 故选 B.

6、C

【解析】

设出直线的方程, 代入椭圆方程中消去 y , 根据判别式大于 0 求得 t 的范围, 进而利用弦长公式求得 $|AB|$ 的表达式, 利用 t 的范围求得 $|AB|$ 的最大值.

【详解】

解: 设直线 l 的方程为 $y = x + t$, 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 消去 y 得 $\frac{5}{4}x^2 + 2tx + t^2 - 1 = 0$,

由题意得 $\Delta = (2t)^2 - 1(t^2 - 1) > 0$, 即 $t^2 < 1$.

$$\text{弦长}|AB|=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5-t^2}}{5}\leq\frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了椭圆的应用，直线与椭圆的关系．常需要把直线与椭圆方程联立，利用韦达定理，判别式找到解决问题的突破口．

7、A

【解析】

先利用向量坐标运算求解 $\vec{OB}$ ，再利用向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影公式即得解

【详解】

由于向量 $\vec{OA}=(-3,4)$ ， $\vec{OA}+\vec{OB}=(-1,5)$

故 $\vec{OB}=(2,1)$

向量 $\vec{OA}$ 在向量 $\vec{OB}$ 上的投影是 $\frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OB}|}=\frac{-3\times 2+4\times 1}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法的坐标运算和向量投影的概念，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

8、B

【解析】

对 x_0 分类讨论，代入解析式求出 $f(x_0)$ ，解不等式，即可求解.

【详解】

函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+4}, & x > 0 \end{cases}$ ，由 $f(x_0) < 2$

得 $\begin{cases} 2^{-x_0} < 2 \\ x_0 \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sqrt{x_0+4} < 2 \\ x_0 > 0 \end{cases}$

解得 $-1 < x_0 \leq 0$.

故选:B.

【点睛】

本题考查利用分段函数性质解不等式，属于基础题.

9、D

【解析】

先化简函数解析式,再根据函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律,可得所求函数的解析式为 $y = 2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$,

再由正弦函数的对称性得解.

【详解】

$$Q y = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - (1 + \cos 2x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

$\therefore$ 将函数图象上各点的横坐标伸长到原来的 3 倍,所得函数的解析式为

$$y = 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 1,$$

再向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度,所得函数的解析式为

$$y = 2 \sin\left[\frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{6}\right] - 1$$

$$= 2 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = \frac{3}{2}k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in Z,$$

$k = 0$ 可得函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8}, -1\right)$, 故选 D.

【点睛】

三角函数的图象与性质是高考考查的热点之一,经常考查定义域、值域、周期性、对称性、奇偶性、单调性、最值等,其中公式运用及其变形能力、运算能力、方程思想等可以在这些问题中进行体现,在复习时要注意基础知识的理解与落实.三角函数的性质由函数的解析式确定,在解答三角函数性质的综合试题时要抓住函数解析式这个关键,在函数解析式较为复杂时要注意使用三角恒等变换公式把函数解析式化为一个角的一个三角函数形式,然后利用正弦(余弦)函数的性质求解.

10、C

【解析】

根据题意知, $t = 0.8, \rho = 7.6, \frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$, 代入公式 $I = I_0 e^{-\rho t}$, 求出 μ 即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/568047130142006053>