

江苏省南京师范大学连云港华杰实验学校 2024 年高考数学押题试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 $z=i$ 对应的点为 Z ，将向量 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ ，所得向量对应的复数是（ ）

- A. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ C. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

2. 已知 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x+y-2 \leq 0 \\ x-2y-1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，则点 $P(x,y)$ 所在区域的面积是（ ）

- A. 1 B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

3. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\cos x|$ 有下述四个结论：（ ）

- ① $f(x)$ 是偶函数； ② $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上是单调递增函数；
③ $f(x)$ 在 R 上的最大值为 2； ④ $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点.

其中所有正确结论的编号是（ ）

- A. ①②④ B. ①③ C. ①④ D. ②④

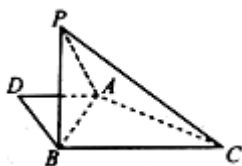
4. 若 $x \in [0,1]$ 时， $e^x - |2x - a| \geq 0$ ，则 a 的取值范围为（ ）

- A. $[-1,1]$ B. $[2-e, e-2]$ C. $[2-e, 1]$ D. $[2\ln 2 - 2, 1]$

5. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-2x^2 + x + 3}\}$ ， $B = \{x | \log_2 x > 1\}$ 则全集 $U = R$ 则下列结论正确的是（ ）

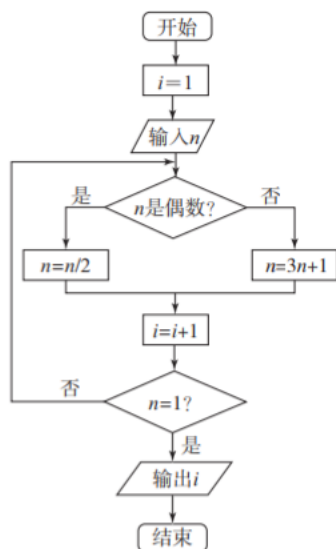
- A. $A \cap B = A$ B. $A \cup B = B$ C. $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$ D. $B \subseteq \complement_U A$

6. 如图，平面四边形 $ACBD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\triangle ABD$ 为等边三角形，现将 $\triangle ABD$ 沿 AB 翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PB \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）



- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

7. “角谷猜想”的内容是：对于任意一个大于1的整数 n ，如果 n 为偶数就除以2，如果 n 是奇数，就将其乘3再加1，执行如图所示的程序框图，若输入 $n=10$ ，则输出 i 的（ ）



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

8. 斜率为1的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于A、B两点，则 $|AB|$ 的最大值为（ ）

- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

9. 下列说法正确的是（ ）

- A. 命题“ $\exists x_0 \leq 0, 2x_0 \leq \sin x_0$ ”的否定形式是“ $\forall x > 0, 2x > \sin x$ ”
- B. 若平面 α, β, γ ，满足 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ 则 $\alpha // \beta$
- C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)，若 $P(0 < \xi < 1) = 0.4$ ，则 $P(\xi > 0) = 0.8$
- D. 设 x 是实数，“ $x < 0$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的充分不必要条件

10. 某校8位学生的本次月考成绩恰好都比上一次的月考成绩高出50分，则以该8位学生这两次的月考成绩各自组成样本，则这两个样本不变的数字特征是（ ）

- A. 方差 B. 中位数 C. 众数 D. 平均数

11. a 为正实数， i 为虚数单位， $\left| \frac{a+i}{i} \right| = 2$ ，则 $a =$ （ ）

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

12. 一个正四棱锥形骨架的底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$ ，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（ ）

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 4π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 3π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

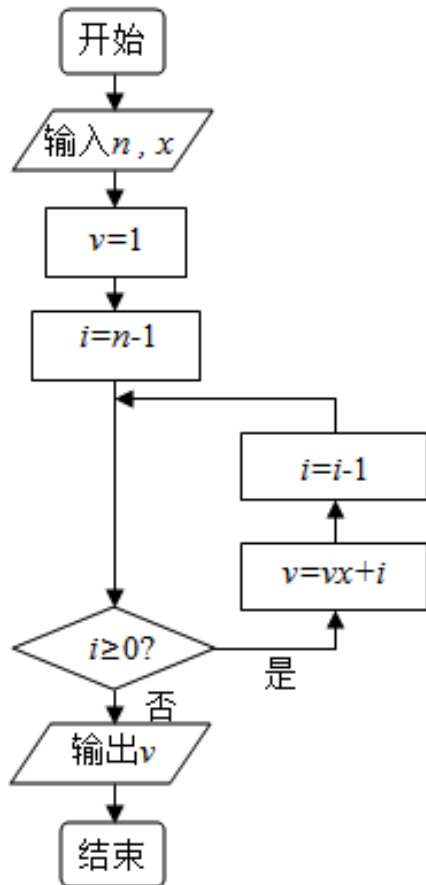
13. 三棱锥 $S-ABC$ 中，点 P 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 上一点.给出下列四个命题：

- ①若 $SA \perp$ 平面 ABC ，则三棱锥 $S-ABC$ 的四个面都是直角三角形；
 ②若 $AC=4$ ， $BC=4$ ， $SC=4$ ， $SC \perp$ 平面 ABC ，则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球体积为 $32\sqrt{3}\pi$ ；
 ③若 $AC=3$ ， $BC=4$ ， $SC=\sqrt{3}$ ， S 在平面 ABC 上的射影是 $\triangle ABC$ 内心，则三棱锥 $S-ABC$ 的体积为2；
 ④若 $AC=3$ ， $BC=4$ ， $SA=3$ ， $SA \perp$ 平面 ABC ，则直线 PS 与平面 SBC 所成的最大角为 60° 。

其中正确命题的序号是_____。（把你认为正确命题的序号都填上）

14. 已知平面向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=2$ ， $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{3}$ ，且 $(\vec{a}-\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{c})=0$ ，则 $|\vec{c}|$ 的取值范围是_____。

15. 秦九韶算法是南宋时期数学家秦九韶提出的一种多项式简化算法，如图所示的框图给出了利用秦九韶算法求多项式值的一个实例，若输入 n ， x 的值分别为4，5，则输出 v 的值为_____。



16. 设 $a \in \mathbb{R}$ ，若函数 $y=e^x+ax, x \in \mathbb{R}$ 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是_____

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 2019 年是五四运动 100 周年.五四运动以来的 100 年, 是中国青年一代又一代接续奋斗、凯歌前行的 100 年, 是中口青年用青春之我创造青春之中国、青春之民族的 100 年.为继承和发扬五四精神在青年节到来之际, 学校组织“五四运动 100 周年”知识竞赛, 竞赛的一个环节由 10 道题目组成, 其中 6 道 A 类题、4 道 B 类题, 参赛者需从 10 道题目中随机抽取 3 道作答, 现有甲同学参加该环节的比赛.

(1) 求甲同学至少抽到 2 道 B 类题的概率;

(2) 若甲同学答对每道 A 类题的概率都是 $\frac{2}{3}$, 答对每道 B 类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 且各题答对与否相互独立.现已知甲同学恰好抽中 2 道 A 类题和 1 道 B 类题, 用 X 表示甲同学答对题目的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数, $0\leq\alpha<\pi$).在以 O 为极点, x

轴正半轴为极轴的极坐标中, 曲线 $C: \rho=4\cos\theta$.

(1) 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时, 求 C 与 l 的交点的极坐标;

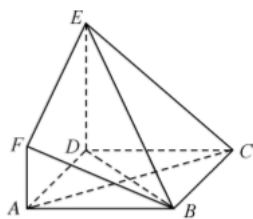
(2) 直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 中点为 $M(1,1)$, 求 $|AB|$ 的值.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , $\sqrt{3}\sin(A+B)=4\sin^2\frac{C}{2}$.

(1) 求 $\cos C$;

(2) 若 $b=7$, D 是 BC 边上的点, 且 $\triangle ACD$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\sin\angle ADB$.

20. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, $DE\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\perp AD$, $AF\parallel DE$, $DE=3AF$.



(1) 求证: $AC\perp$ 平面 BDE ;

(2) 若 BE 与平面 $ABCD$ 所成角为 60° , 求二面角 $F-BE-D$ 的正弦值.

21. (12 分) 设 $P(n, m)=\sum_{k=0}^n(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$, $Q(n, m)=C_{n+m}^n$, 其中 $m, n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求 $P(n, 1)\cdot Q(n, 1)$ 的值;

(2) 对 $\forall m\in\mathbb{N}^+$, 证明: $P(n, m)\cdot Q(n, m)$ 恒为定值.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $b_1=a_1=1$, $b_3=a_3+1$, $b_5=a_5-7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n ;

(3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和, 若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$, 求实数 t 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由复数 z 求得点 Z 的坐标, 得到向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的坐标, 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$, 得到向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标, 则对应的复数可求.

【详解】

解: $\because$ 复数 $z=i$ (i 为虚数单位) 在复平面中对应点 $Z(0, 1)$,

$\therefore \overrightarrow{OZ} = (0, 1)$, 将 $\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $\overrightarrow{OB}$,

设 $\overrightarrow{OB} = (a, b)$, $a < 0, b > 0$,

$$\text{则 } \overrightarrow{OZ} \cdot \overrightarrow{OB} = b = |\overrightarrow{OZ}| |\overrightarrow{OB}| \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 = 1,$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{对应复数为 } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查复数的代数表示法及其几何意义，是基础题.

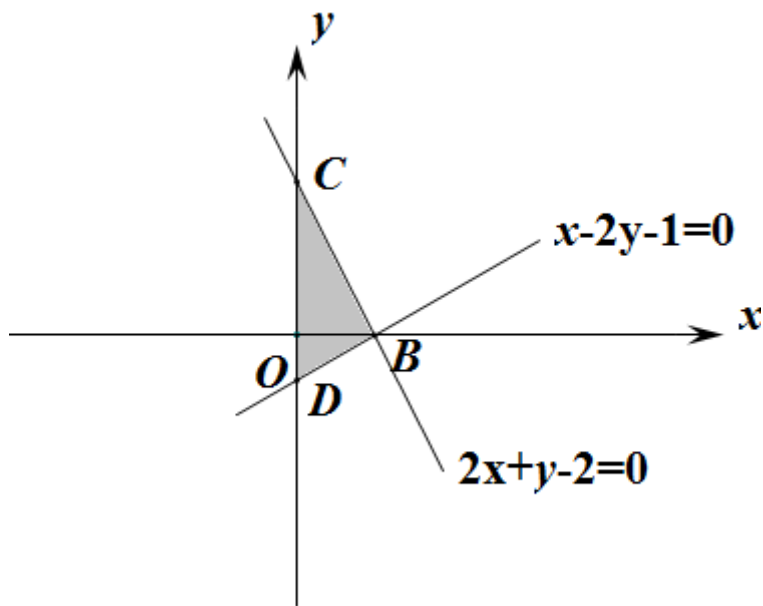
2、C

【解析】

画出不等式表示的平面区域，计算面积即可.

【详解】

不等式表示的平面区域如图：



直线 $2x + y - 2 = 0$ 的斜率为 -2 ，直线 $x - 2y - 1$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，所以两直线垂直，故 $\triangle BCD$ 为直角三角形，易得

$B(1,0)$ ， $D(0, -\frac{1}{2})$ ， $C(0,2)$ ， $|BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ， $|BC| = \sqrt{5}$ 所以阴影部分面积 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式组表示的平面区域面积的求法，考查数形结合思想和运算能力，属于常考题.

3、C

【解析】

根据函数 $f(x)$ 的奇偶性、单调性、最值和零点对四个结论逐一分析，由此得出正确结论的编号.

【详解】

$f(x)$ 的定义域为 R .

由于 $f(-x) = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故①正确.

由于 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 上不是单调递增函数, 所以②错误.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x + |\cos x| = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$,

且存在 $x = \frac{\pi}{4}$, 使 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \left|\cos \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{2}$.

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq \sqrt{2}$;

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $x \in \mathbf{R}$ 时 $f(x) \leq \sqrt{2}$,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 所以③错误.

依题意, $f(0) = \sin|0| + |\cos 0| = 1$, 当 $0 < x \leq 2\pi$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ \sin x - \cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

所以令 $\sin x + \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{7\pi}{4}$, 令 $\sin x - \cos x = 0$, 解得 $x = \frac{5\pi}{4}$. 所以在区间 $(0, 2\pi]$, $f(x)$ 有两个零点.

由于 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0)$ 有两个零点. 故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 4 个零点. 所以④正确.

综上所述, 正确的结论序号为①④.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查三角函数的奇偶性、单调性、最值和零点, 考查化归与转化的数学思想方法, 属于中档题.

4、D

【解析】

由题得 $2x - e^x \leq a \leq 2x + e^x$ 对 $\forall x \in [0, 1]$ 恒成立, 令 $f(x) = 2x - e^x$, $g(x) = 2x + e^x$, 然后分别求出

$f(x)_{\max}$, $g(x)_{\min}$ 即可得 a 的取值范围.

【详解】

由题得 $2x - e^x \leq a \leq 2x + e^x$ 对 $\forall x \in [0, 1]$ 恒成立,

令 $f(x) = 2x - e^x$, $g(x) = 2x + e^x$,

Q $f'(x) = 2 - e^x$ 在 $[0, 1]$ 单调递减, 且 $f'(\ln 2) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2, 1)$ 上单调递减,

$\therefore a \geq f(x)_{\max} = f(\ln 2) = 2 \ln 2 - 2$,

又 $g(x) = 2x + e^x$ 在 $[0, 1]$ 单调递增, $\therefore a \leq g(x)_{\min} = g(0) = 1$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $[2 \ln 2 - 2, 1]$.

故选: D

【点睛】

本题主要考查了不等式恒成立问题, 导数的综合应用, 考查了转化与化归的思想. 求解不等式恒成立问题, 可采用参变量分离法去求解.

5、D

【解析】

化简集合 A , 根据对数函数的性质, 化简集合 B , 按照集合交集、并集、补集定义, 逐项判断, 即可求出结论.

【详解】

由 $-2x^2 + x + 3 \geq 0, (2x - 3)(x + 1) \leq 0$,

则 $A = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$, 故 $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

由 $\log_2 x > 1$ 知, $B = (2, +\infty)$, 因此 $A \cap B = \emptyset$,

$A \cup B = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \cup (2, +\infty)$, $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = (2, +\infty)$,

$(2, +\infty) \subseteq (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

故选: D

【点睛】

本题考查集合运算以及集合间的关系, 求解不等式是解题的关键, 属于基础题.

6、A

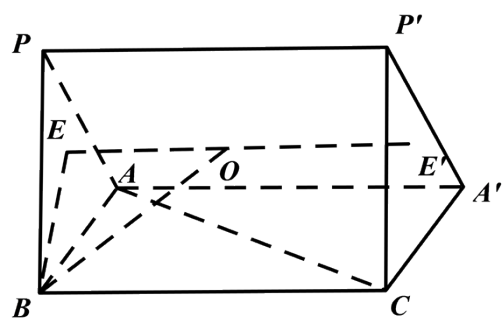
【解析】

将三棱锥 $P - ABC$ 补形为如图所示的三棱柱, 则它们的外接球相同, 由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上, 在 $Rt\triangle OBE$ 中, 计算半径 OB 即可.

【详解】

由 $AB \perp BC$ ， $PB \perp BC$ ，可知 $BC \perp$ 平面 PAB 。

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同。



由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E ，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

可得 $BE = 1$ 。又 $OE = \frac{BC}{2} = 1$ ，故在 $Rt\triangle OBE$ 中， $OB = \sqrt{2}$ ，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 8π 。

故选：A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题。

7、B

【解析】

模拟程序运行，观察变量值可得结论。

【详解】

循环前 $i = 1, n = 10$ ，循环时： $n = 5, i = 2$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 16, i = 3$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 8, i = 4$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 4, i = 5$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 2, i = 6$ ，不满足条件 $n = 1$ ； $n = 1, i = 7$ ，满足条件 $n = 1$ ，退出循环，输出 $i = 7$ 。

故选：B。

【点睛】

本题考查程序框图，考查循环结构，解题时可模拟程序运行，观察变量值，从而得出结论。

8、C

【解析】

设出直线的方程，代入椭圆方程中消去 y ，根据判别式大于 0 求得 t 的范围，进而利用弦长公式求得 $|AB|$ 的表达式，利用 t 的范围求得 $|AB|$ 的最大值。

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/568074014076006074>