重难点专项突破 02 二次函数与不等式（3 种题型）

【题型细目表】

【考点剖析】

题型一：图像法解一元二次不等式

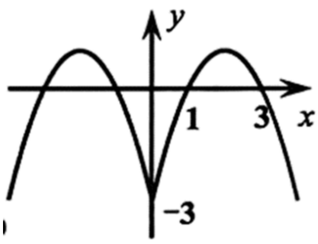
一、单选题

1．（2023 秋·浙江嘉兴·九年级统考期末）我们规定：形如 $y=ax^2+b|x|+c(a<0)$ 的函数叫作“M 型”函数．如图是“M 型”函数 $y=-x^2+4|x|-3$ 的图象，根据图象，以下结论：

①图象关于 y 轴对称；

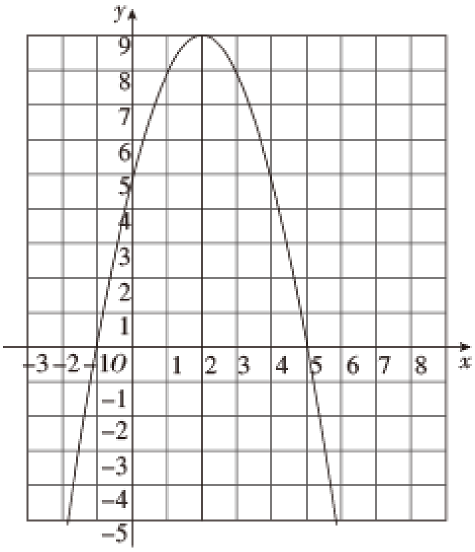
②不等式 $x^2-4|x|+3<0$ 的解集是 $-3<x<-1$ 或 $1<x<3$；

③方程 $-x^2+4|x|-3=k$ 有两个实数解时 $k<-3$．正确的是（　　）



A．①②．　　　　B．②③．　　　　C．①③．　　　　D．①②③．

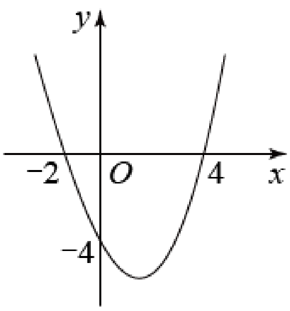
2．（2022 春·浙江绍兴·九年级专题练习）知函数 $y=a|x-2|+x+b$（a，b 为常数）．当 $x=3$ 时，$y=0$，当 $x=0$ 时，$y=-1$，对该函数及其图象，笑笑进行探究，得到了以下结论：①$a=2$；②$b=-5$；③该函数当 $x\geq 2$ 时，y 随 x 的增大而增大；④结合图象，可以直接写出不等式 $a|x-2|+x+b\geq -x^2+4x+5$ 为 $x\geq \frac{1+\sqrt{57}}{2}$．以上结论正确的是（　　）



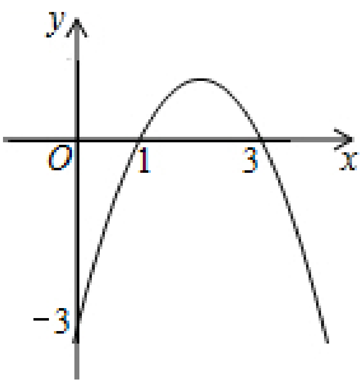
A．①②③④　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③

二、填空题

3．（2022秋·浙江宁波·九年级校联考阶段练习）二次函数图像如图所示，当$y<0$时，x的取值范围是______.



4．（2022秋·浙江嘉兴·九年级校联考期中）若二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示，则不等式$a(x-2)^2+b\left(x-2\right)+c<0$的解集为________.



三、解答题

5．（2022秋·浙江杭州·九年级校联考阶段练习）在平面直角坐标系内，二次函数$y_1=(x-a)^2+a-1$（a为常数）.

(1)若函数y的图象经过点$(1,0)$，求函数y_1的表达式.

(2)若y_1的图象与一次函数$y_2=x+1$的图象有两个交点，横坐标分别为− 1，2，请直接写出当$y_1>y_2$时x的取值范围.

(3)已知(x_0,n)在函数y_1的图象上，当$x_0>2a>0$时，求证：$n>-\frac{5}{4}$.

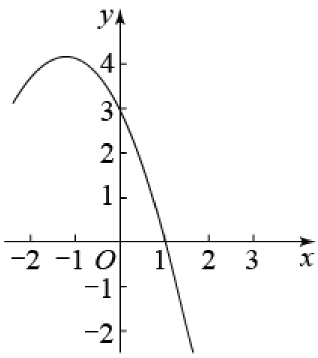
6．（2022秋·浙江杭州·九年级校考阶段练习）已知二次函数$y=-x^2+4x+6$

(1)求出该函数图象的顶点坐标，图象与x轴的交点坐标

(2)当x在什么范围内时，y随x的增大而增大?

(3)当x在什么范围内时，$y\le 1$?

7．（2022秋·浙江绍兴·九年级校考阶段练习）已知抛物线$y=-x^2+bx+c$的部分图象如图所示.



(1)求 b，c 的值；

(2)直接写出该二次函数当 $y>0$ 时，x 的取值范围．

8．（2022 秋·浙江杭州·九年级校考阶段练习）已知二次函数 $y=ax^2+bx-3$ (a， b 是常数，且 $a\neq0$)的图象经过点 $\left(2,-3\right)$．

(1)求该函数图象的对称轴；

(2)若该函数图象还经过点 $\left(3,0\right)$

①求该函数的解析式；

②当 $y<0$ 时，直接写出 x 的取值范围．

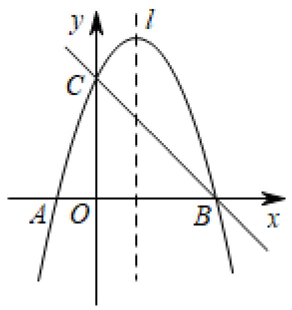
9．（2023·浙江·九年级专题练习）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$．

(1)若 $a=-1$，且函数图象经过 $(0,3)$，$(2,-5)$ 两点，求此二次函数的解析式；并根据图象直接写出函数值 $y\geq 3$ 时自变量 x 的取值范围；

(2)在（1）的条件下，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 的左侧），将这条抛物线向右平移 m（$m>0$）个单位，平移后的抛物线于 x 轴交于 C，D 两点（点 C 在点 D 的左侧），若 B，C 是线段 AD 的三等分点，求 m 的值．

(3)已知 $a=b=c=1$，当 $x=p$，q（p，q 是实数，$p\neq q$）时，该函数对应的函数值分别为 P，Q．若 $p+q=2$，求证 $P+Q>6$．

10．（2022秋·浙江宁波·九年级统考期末）如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 和 $C(0,3)$ 三点．



(1)求这个二次函数及直线 BC 的函数关系式；

(2)直接写出不等式 $ax^2+bx+c<-x+3$ 的解；

(3)点 P 是抛物线对称轴 l 上的一个动点，当 $PA+PC$ 的值最小时，求点 P 的坐标．

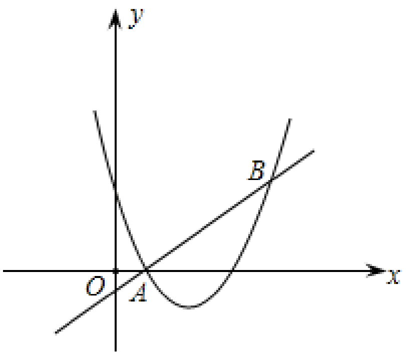
11．（2022·浙江·九年级专题练习）如图，在平面直角坐标系中，已知 $B(0,2)$，$C\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，点A在 x

轴正半轴上，且$OA=2OB$．抛物线$y=ax^2+bx(a\neq 0)$经过点A，C．

(1)求这条抛物线的解析式，并直接写出当$y>-\frac{3}{2}$时x的取值范围；

(2)将抛物线先向右平移m个单位，再向上平移2个单位，此时点C恰好落在线段AB上，求m的值．

12．（2023·浙江·九年级专题练习）如图，直线$y=x+m$和抛物线$y=x^2+bx+c$都经过点A（1，0），B（3，2）．



(1)求m的值和抛物线的解析式；

(2)求不等式$x^2+bx+c>x+m$的解集．（直接写出答案）

13．（2022秋·浙江杭州·九年级校考期中）已知：直线$y=kx-2\left(k\neq 0\right)$经过抛物线$y=-x^2+mx+n$的顶点$\left(2,1\right)$．

(1)求抛物线的表达式；

(2)求此抛物线与坐标轴的三个交点所构成的三角形的面积；

(3)请直接写出不等式$0<-x^2+mx+n<kx-2$的解集.

14.（2022·浙江杭州·统考一模）在直角坐标系中，设函数$y_1=ax^2+bx-a$（a，b是常数，$a\neq 0$）.

(1)已知函数y_1的图象经过点（1，2）和$(-2,-1)$，求函数y_1的表达式.

(2)若函数y_1图象的顶点在函数$y_2=2ax$的图象上，求证：$b=2a$.

(3)已知点$A(-2,0)$，$B(1,k^2-a)$在函数y_1的图象上，且$k\neq 0$．当$y_1>0$时，求自变量x的取值范围.

题型二：利用不等式求自变量或函数值的范围

一、单选题

1.（2022秋·浙江舟山·九年级校联考期中）已知$t=x^2-2x+4,x,y$满足$\begin{cases}x-y=m+1\\x+y=3m+3\end{cases}$，且$-1\leq y\leq 1$，则$t$的取值范围是（　）

A．$4\leq 1\leq 12$　　B．$3\leq 1\leq 12$　　C．$3\leq t\leq 4$　　D．$4\leq 1\leq 7$

2．（2022·浙江·九年级专题练习）已知函数 $y=\begin{cases}x^2-x(x\geq 0)\\-x^2-x(x<0)\end{cases}$，当 a≤x≤b 时，﹣ $\frac{1}{4}$≤y≤2，则 b﹣ a 的最大值为（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　　　B．$\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\frac{3}{2}$　　　　D．2

3．（2022·浙江宁波·一模）已知 A，B 两点的坐标分别为$\left(2,-3\right)$，$\left(0,-1\right)$，线段 AB 上有一动点 $M\left(m，n\right)$，过点 M 作 x 轴的平行线交抛物线 $y=a(x-1)^2+2$ 于 $P\left(x_1，y_2\right)$，$Q\left(x_2，y_2\right)$两点（P 在 Q 的左侧）．若 $x_1\leq m<x_2$ 恒成立，则 a 的取值范围为（　　）

A．$a<-5$　　　　B．$a\leq-3$　　　　C．$-5<a<0$　　　　D．$-3\leq a<0$

4．（2023 秋·浙江湖州·九年级统考期末）抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 y 轴交于点 C，过点 C 作直线 l 垂直于 y 轴，将抛物线在 y 轴右侧的部分沿直线 l 翻折，其余部分保持不变，组成图形 G，点 $M\left(m,y_1\right)$，$N\left(m+1,y_2\right)$为图形 G 上两点，若 $y_1>y_2$，则 m 的取值范围是（　）

A．$0\leq m<\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<m<1$　　　　C．$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ D．$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<m<\frac{1}{2}$

二、填空题

5．（2022 秋·浙江·九年级期中）对于一个函数，当自变量 x 取 n 时，函数值 y 等于 2﹣ n，我们称 n 为这个函数的“二合点”，如果二次函数 y＝ax²+x﹣ 1 有两个相异的二合点 x_1，x_2，且 x_1＜x_2＜1，则 a 的取值范围是_____．

6．（2022 秋·浙江金华·九年级校联考阶段练习）新定义：若一个点的纵坐标是横坐标的 2 倍，则称这个点为二倍点．若二次函数 $y=x^2-x+c(c$（c 为常数）在 $-2<x<4$ 的图象上存在两个二倍点，则 c 的取值范围是_______．

三、解答题

7．（2022 秋·浙江杭州·九年级杭州市丰潭中学校考阶段练习）已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，且当 $x_1=-2$，$x_2=6$ 时，$y_1=y_2$．

(1)求 b 的值；

(2)若 $P\left(m+3,n_1\right)$，$Q\left(m,n_2\right)$也是该二次函数图象上的两个点，且 $n_1<n_2$，求实数 m 的取值范围；

(3)若点$T\left(t,2t\right)$不在该二次函数的图象上，求c的取值范围．

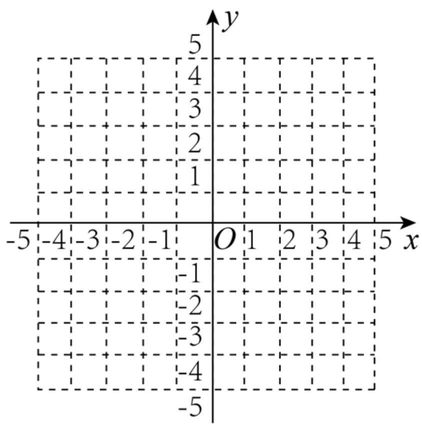
8．（2022秋·浙江金华·九年级义乌市绣湖中学教育集团校联考期中）某“数学兴趣小组”根据学习函数的经验，对函数$y=-\left(x-1\right)\left(\left|x\right|-3\right)$的图象和性质进行了探究，探究过程如下，请补充完整：

获得图象：

计算x与y的几组对应值，列表如下：

x	•••	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	•••
y	•••	-5	0	-3	-4	-3	0	1	0	-3	•••

(1)如图，在直角坐标系中画出了函数$y=-\left(x-1\right)\left(\left|x\right|-3\right)$将这个图象补画完整．



探究性质：

(2)根据函数图象，写出该函数的一个正确结论：

解决问题：

(3)若过定点的直线$y=tx-2t+2$与函数$y=-\left(x-1\right)\left(\left|x\right|-3\right)$（$2<x\le 4$）的图象只有一个交点，请结合函数图象求出$t$的取值范围．

9．（2022秋·浙江金华·九年级校联考期中）某“数学兴趣小组”根据学习函数的经验，对函数

$y=-(x-1)(|x|-3)$ 的图象和性质进行了探究，探究过程如下，请补充完整：

(1)x 与 y 的几组对应值如下表，其中 m=________．

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	5	0	-3	m	-3	0	1	0	-3	……

(2)如图，在直角坐标系中画出了函数 $y=-(x-1)(|x|-3)$ 的部分图象，用描点法将这个图象补画完整．

(3)结合函数图象，解决下列问题：

①解不等式：$-3\le -(x-1)(|x|-3)\le 1$；

②若直线 $y=tx-2t+2$ 与函数 $y=-(x-1)(|x|-3)$ 的图象只有一个的交点，求 t 的取值范围．

10．（2022秋·浙江台州·九年级统考期末）二次函数 $y=ax^2+2x+c\left(a\ne 0\right)$ 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-1	-2	-1	2	7	…

(1)二次函数的图象开口向______，对称轴为直线 $x=$______．

(2)求该二次函数的解析式．

(3)当 $-3<x<3$ 时，求 y 的取值范围，

11．（2022秋·浙江杭州·九年级校联考期中）已知二次函数经过点 $\left(-1,0\right)$，$\left(3,0\right)$，且最大值为 4．

(1)求二次函数的解析式；

(2)在平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数的图象；

(3)当$1<x<4$时，结合函数图象，直接写出y的取值范围．

12．（2023春·浙江宁波·九年级校联考竞赛）已知抛物线$y_1=ax^2+bx$．

(1)若此抛物线与x轴只有一个公共点且过点$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$．

①求此抛物线的解析式；

②直线$y_2=-x+k$与该抛物线交于点$A(-2,m)$和点B．若$y_1<y_2$，求x的取值范围．

(2)若$a>0$，将此抛物线向上平移c个单位$(c>0)$得到新抛物线y_3，当$x=c$时，$y_3=0$；当$0<x<c$时，$y_3>0$．试比较ac与1的大小，并说明理由．

题型三：根据交点确定不等式的解集

一、单选题

1．（2023秋·浙江杭州·九年级统考期末）已知二次函数$y=ax^2+bx+c$，函数值y与自变量x的部分对应值如表：

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	18	8	2	0	2	…

则当$y>8$时，x的取值范围是（　　）

A．$0<x<4$　　B．$0<x<5$

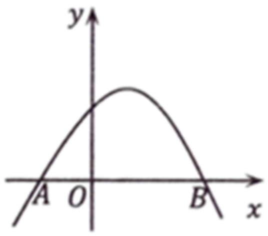
C．$x<0$或$x>4$　　D．$x<0$或$x>5$

2．（2023秋·浙江温州·九年级期末）二次函数 $y=(x-b)^2+b+1$ 的图象与一次函数 $y=-x+5(-1\le x\le 5)$ 的图象没有交点，则 b 的取值范围是（　　）

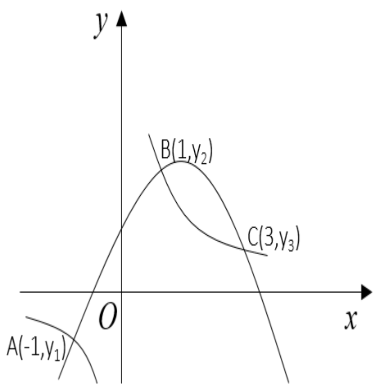
A．$b<-4$　　B．$b>\frac{17}{8}$　　C．$b<-4$ 或 $b>\frac{17}{8}$　　D．$-4<b<\frac{17}{8}$

二、填空题

3．（2023春·浙江金华·九年级校联考阶段练习）如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，且 $a\neq 0$）交 x 轴于 $A\left(-1,0\right)$，$B\left(2,0\right)$ 两点，则不等式 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$ 的解集为_______.

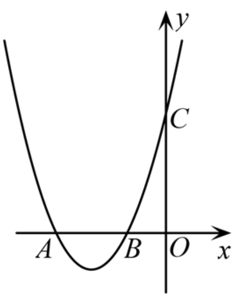


4．（2023秋·浙江杭州·九年级期中）如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于点 $A\left(-1,y_1\right)$、$B\left(1,y_2\right)$、$C\left(3,y_3\right)$ 三个点，则不等式 $ax^2+bx+c>\frac{k}{x}$ 的解是_____.



三、解答题

5．（2023·浙江宁波·统考一模）如图，二次函数 $y_1=ax^2+bx+3$ 的图象与 x 轴相交于点 $A(-3,0)$，$B(-1,0)$，与 y 轴相交于点 C．



(1)求二次函数的表达式和其图象的顶点坐标．

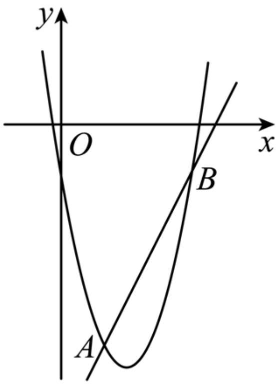
(2)若一次函数 $y_2=kx+3$ 的图象经过二次函数图象的顶点，请根据图象直接写出当 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.

6．（2023 秋·浙江湖州·九年级统考期末）已知二次函数 $y=-x^2+6x-5$．

(1)求此二次函数图象的顶点坐标；

(2)当函数值 $y\le 0$ 时，求自变量 x 的取值范围.

7．（2023 秋·浙江宁波·九年级统考期末）如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y_1=kx-7$ 的图象与二次函数 $y_2=2x^2+bx+c$ 的图象交于 $A(1,-5)$、$B(3,t)$ 两点.



(1)求 y_1 与 y_2 的函数关系式；

(2)直接写出当 $y_1<y_2$ 时，x 的取值范围；

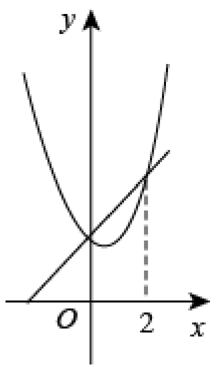
(3)点 C 为一次函数 y_1 图象上一点，点 C 的横坐标为 n，若将点 C 向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位后刚好落在二次函数 y_2 的图象上，求 n 的值.

8．（2023春·浙江杭州·九年级专题练习）若二次函数$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$的图象的顶点在一次函数$y=kx+t\left(k\neq 0\right)$的图象上，则称$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$为$y=kx+t\left(k\neq 0\right)$的伴随函数，如$y=x^2+1$是$y=x+1$的伴随函数．

(1)若函数$y=x^2-4$先向右平移2个单位，再向上平移1个单位后是$y=-x+p$的伴随函数，求p的值

(2)若函数$y_1=mx-3\left(m\neq 0\right)$的伴随函数$y_2=x^2+2x+n$与$x$轴只有一个交点，求当$y_1>y_2$时，$x$的取值范围．

9．（2023春·浙江杭州·九年级专题练习）已知抛物线$y_1=x^2+bx+c$与一次函数$y_2=x+4$有两个交点，且交点的横坐标分别为$x_1=0$，$x_2=2$.



(1)根据图象直接写出，当$y_1 … y_2$时，x的取值范围为 ____；

(2)将抛物线$y_1=x^2+bx+c$向上平移，使其顶点落在一次函数图象上，求平移后图象所对应的二次函数的表达式．

10．（2023·浙江·九年级专题练习）已知函数$y=ax^2+(1-3a)x-4$（a是常数，且$a\neq 0$）．

(1)若点$(1,-1)$在二次函数y的图象上，

①求该函数的表达式和顶点坐标；

②若点$P(x_0,m)$和$Q(5,n)$在函数的图象上，且$m<n$，求x_0的取值范围；

(2)若函数y的图象过(x_1,y_1)和(x_2,y_2)两点，且当$x_1<x_2\leq\frac{4}{3}$时，始终都有$y_1>y_2$，求a的取值范围．

11．（2023春·浙江金华·九年级义乌市绣湖中学教育集团校考阶段练习）已知二次函数$y=mx^2-(m+n)x+n(m<0)$，$A(-1,0),B(0,-1),C(0,1)$．

(1)若二次函数的图象经过A，C两点，求二次函数的解析式．

(2)若二次函数图象与y轴正半轴有交点，试判断二次函数的图象与x轴的交点个数，并说明理由．

(3)若二次函数图象经过点C，设$P(a,b)$为二次函数图象上的一个动点，当$-3<a<0$时，点P关于x轴的对称点都在直线AB的下方，求m的取值范围．

12．（2023·浙江杭州·九年级专题练习）已知二次函数$y=x^2+bx+c$的图象经过点$\left(2,c\right)$．

(1)若该二次函数图象与x轴的一个交点是$\left(-1,0\right)$．

①求二次函数的表达式：

②当$t\le x\le 2-t$时，函数最大值为M，最小值为N．若$M-N=3$，求t的值；

(2)对于该二次函数图象上的两点$A\left(x_1，y_1\right)$，$B\left(3,y_2\right)$，当$m\leqslant x_1\leqslant m+1$时，始终有$y_1\ge y_2$．求$m$的取值范围．

13．（2023春·浙江杭州·九年级杭州市杭州中学校考阶段练习）平面直角坐标系中有函数y_1、y_2、y_3，$y_1=ax^2+bx+c\left(a\ne 0\right)$，$y_2=-x^2+2x$，$y_3=kx+b\left(k\ne 0\right)$，$y_1$的图象向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位后与y_2的图象重合，y_3经过y_1与y轴的交点以及y_2的顶点．

(1)求y_1和y_3的表达式；

(2)当$x…0$时，试比较y_2与y_3的大小：

(3)当$x<m$时，y_1,y_2,y_3均随着x的增大而增大，求实数m的最大值．

重难点专项突破 02 二次函数与不等式（3 种题型）

【题型细目表】

题型一：图像法解一元二次不等式

题型二：利用不等式求自变量或函数值的范围

题型三：根据交点确定不等式的解集

【考点剖析】

题型一：图像法解一元二次不等式

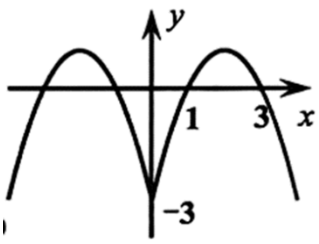
一、单选题

1．（2023 秋·浙江嘉兴·九年级统考期末）我们规定：形如 $y=ax^2+b|x|+c(a<0)$ 的函数叫作“M 型”函数．如图是“M 型”函数 $y=-x^2+4|x|-3$ 的图象，根据图象，以下结论：

①图象关于 y 轴对称；

②不等式 $x^2-4|x|+3<0$ 的解集是 $-3<x<-1$ 或 $1<x<3$；

③方程 $-x^2+4|x|-3=k$ 有两个实数解时 $k<-3$．正确的是（　）



A．①②．　　　B．②③．　　　C．①③．　　　D．①②③．

【答案】A

【分析】根据函数图象直接判断 A，根据二次函数与坐标轴的交点分析，根据对称性可得 y 轴与 x 轴左边的交点为 $(-1,0),(-3,0)$，即可判断 B，根据图象可知当 $k<-3$ 或 $k=1$ 时，原方程有两个实数根，据此即可求解．

【详解】解：由函数图象可知，此图像关于 y 轴对称，故①正确；

②对称性可得 y 轴与 x 轴左边的交点为 $(-1,0),(-3,0)$，则不等式 $x^2-4|x|+3<0$ 即 $-x^2+4|x|-3>0$ 的解集是 $-3<x<-1$ 或 $1<x<3$，故②正确；

③$\because y=-x^2+4|x|-3=-(|x|-2)^2+1$，当 $|x|=2$ 时，$y=1$，顶点坐标为 $(-2,1)$ 和 $(2,1)$，且与 y 轴交于点 $(0,-3)$，

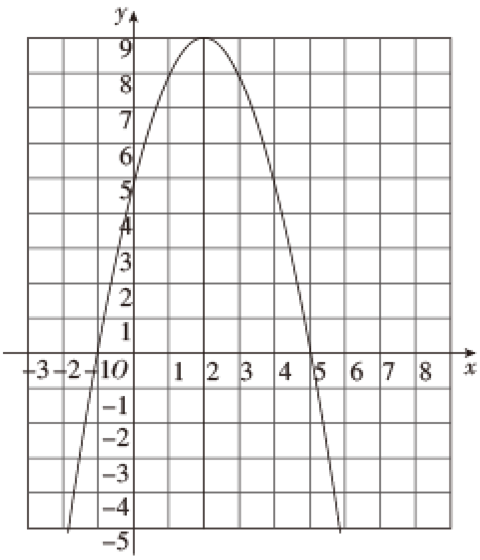
∴当$k<-3$或$k=1$时，方程$-x^2+4|x|-3=k$有两个实数解，

故③不正确，

故选：A．

【点睛】本题考查了二次函数图象的性质，掌握二次函数的性质是解题的关键．

2．（2022春·浙江绍兴·九年级专题练习）知函数$y=a|x-2|+x+b$（a，b为常数）．当$x=3$时，$y=0$，当$x=0$时，$y=-1$，对该函数及其图象，笑笑进行探究，得到了以下结论：①$a=2$；②$b=-5$；③该函数当$x\geq 2$时，y随x的增大而增大；④结合图象，可以直接写出不等式$a|x-2|+x+b\geq -x^2+4x+5$为$x\geq\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}$．以上结论正确的是（　　）



A．①②③④　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③

【答案】D

【分析】①②由题意得：$\begin{cases}a|3-2|+3+b=0\\2a+b=-1\end{cases}$，即可求解；

③函数的表达式为$y=2|x-2|+x-5$，当$x\geq 2$时，$y=2|x-2|+x-5=3x-9$，当$x<2$时，$y=2|x-2|+x-5=-x-1$，根据函数表达式画出函数图象，即可求解；

④观察函数图象即可求解．

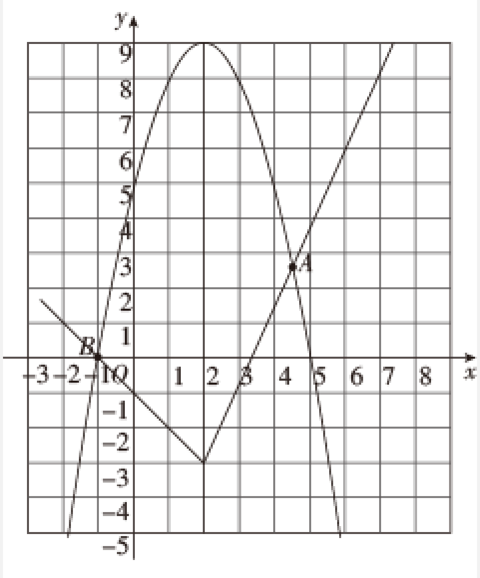
【详解】解：由题意得：$\begin{cases}a|3-2|+3+b=0\\2a+b=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=-5\end{cases}$，故①②正确；

因此函数的表达式为$y=2|x-2|+x-5$，

当$x\geq 2$时，$y=2|x-2|+x-5=3x-9$，

当$x<2$时，$y=2|x-2|+x-5=-x-1$；

根据函数表达式画出函数图象如下：



从图象看，当$x \geq 2$时，y随x的增大而增大，故③正确；

（3）从图象看两个函数交于点A、$B(-1,0)$，

联立$y=3x-9$和$y=-x^2+4x+5$得：$3x-9=-x^2+4x+5$，解得$x=\frac{1+\sqrt{57}}{2}$（负值已舍去），

即点A 的横坐标为$\frac{1+\sqrt{57}}{2}$，

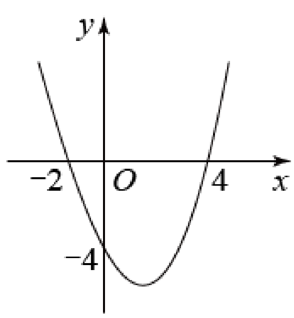
从函数图象看，不等式$a|x-2|+x+b \geqslant -x^2+4x+5$的解集为$x \leq -1$或$x \geq \frac{1+\sqrt{57}}{2}$，故④错误；

故选：D．

【点睛】本题考查的是二次函数与不等式（组），主要要求学生通过观察函数图象的方式来求解不等式，正确画出函数图象是本题解题的关键．

二、填空题

3．（2022秋·浙江宁波·九年级校联考阶段练习）二次函数图像如图所示，当$y<0$时，x的取值范围是______．



【答案】$-2<x<4$

【分析】利用抛物线与 x 轴的两个交点坐标，然后写出抛物线在 x 轴下方所对应的自变量的范围即可.

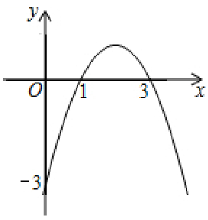
【详解】解：∵抛物线与 x 轴的一个交点坐标为（–2，0），与 x 轴的另一个交点坐标为（3，0），

∴当 $-2<x<4$ 时， $y<0$.

故答案为： $-2<x<4$.

【点睛】本题考查了求抛物线与 x 轴的交点和图像法解一元二次不等式，解题的关键是通过数形结合的方法求解一元二次不等式.

4．（2022 秋·浙江嘉兴·九年级校联考期中）若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则不等式 $a(x-2)^2+b\left(x-2\right)+c<0$ 的解集为________.



【答案】 $x<3$ 或 $x>5$

【分析】直接利用函数图象即可得出结论.

【详解】∵由函数图象可知，当 x<1 或 x>3 时，函数图象在 x 轴的下方，

∴函数 y=a（x-2）²+b（x-2）+c 的图象与 x 轴的交点为 3，5，（把 x-2 作为一个整体，代入上面的函数中，）

∴不等式 a（x-2）²+b（x-2）+c<0<0 的解集为 x<3 或 x>5，

故答案为 x<3 或 x>5.

【点睛】本题考查的是二次函数与不等式组，能根据题意利用数形结合求出不等式的解集是解答此题的关键.

三、解答题

5．（2022 秋·浙江杭州·九年级校联考阶段练习）在平面直角坐标系内，二次函数 $y_1=(x-a)^2+a-1$（a 为常数）.

(1)若函数 y 的图象经过点 $(1,0)$，求函数 y_1 的表达式.

(2)若 y_1 的图象与一次函数 $y_2=x+1$ 的图象有两个交点，横坐标分别为﹣1，2，请直接写出当 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围.

(3)已知 (x_0,n) 在函数 y_1 的图象上，当 $x_0>2a>0$ 时，求证： $n>-\frac{5}{4}$.

【答案】(1) $y_1=x^2-1$ 或 $y_1=x^2-2x+1$；

(2) $x<-1$ 或 $x>2$

(3)见解析

【分析】（1）利用待定系数法解答即可；

（2）根据题意画出草图解答便可；

（3）由题意可得当 x=0 时的函数值小于当 $x=x_0$ 时的函数值，列出不等式即可得出结论．

（1）

解：∵函数 y_1 的图象经过点 $(1,0)$，

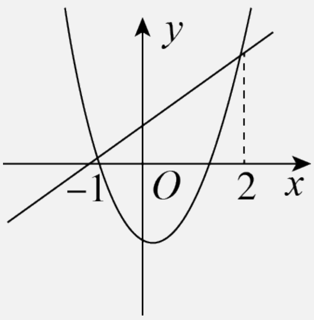
$\therefore (1-a)^2+a-1=0$，

解得：a=0 或 1，

∴函数 y_1 的表达式为 $y_1=x^2-1$ 或 $y_1=x^2-2x+1$．

（2）

解：根据题意作出草图如下，



由函数图象可知，当 $y_1>y_2$ 时 x 的取值范围是：$x<-1$ 或 $x>2$．

（3）

证明：∵$x_0>2a$，

$\therefore \frac{0+x_0}{2}>a.$，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=a$，抛物线开口方向向上，

∴x＝0 和 x＝2a 时的函数值相同，

∴由图象可知当 x＝0 时的函数值小于当 x＝x_0 时的函数值，

即：$n>a^2+a-1$，

$\because a^2+a-1=(a+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$，

$\therefore a^2+a-1\geq-\frac{5}{4}$，

$\therefore n>-\frac{5}{4}$．

【点睛】本题主要考查了待定系数法，二次函数的性质，抛物线上点的坐标的特征，一次函数图象的性质，配方法的应用，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键．

6．（2022秋·浙江杭州·九年级校考阶段练习）已知二次函数 $y=-x^2+4x+6$

(1)求出该函数图象的顶点坐标，图象与 x 轴的交点坐标

(2)当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大?

(3)当 x 在什么范围内时，$y\le 1$？

【答案】(1)顶点为 $(2,10)$，与 x 轴的交点为 $(2+\sqrt{10},0),(2-\sqrt{10},0)$

(2) $x\le 2$

(3) $x\le -1$ 或 $x\geqslant 5$

【分析】（1）把函数解析式整理成顶点式形式，然后写出顶点坐标和对称轴即可，然后令 $y=0$ 解方程求出 x 的值，即可得到与 x 轴的坐标即可；

（2）根据二次次函数的性质解答即可；

（3）根据函数图象分别解答即可．

【详解】（1） $y=-x^2+4x+6=-(x-2)^2+10$，

∴顶点坐标为 $(2,10)$，对称轴为直线 $x=2$，

令 $y=0$，则 $-x^2+4x+6=0$，

整理得 $x^2-4x-6=0$，

解得 $x_1=2+\sqrt{10}$， $x_2=2-\sqrt{10}$，

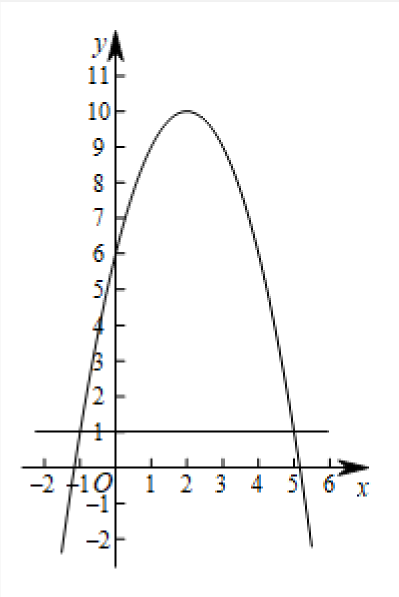
∴函数图象与 x 轴的交点坐标为 $(2+\sqrt{10},0),(2-\sqrt{10},0)$；

（2）∵抛物线 $y=-x^2+4x+6$ 的对称轴为直线 $x=2$，开口向下，

∴当 $x<2$ 时， y 随 x 的增大而增大，

（3）令 $y=1$，即 $1=-x^2+4x+6$

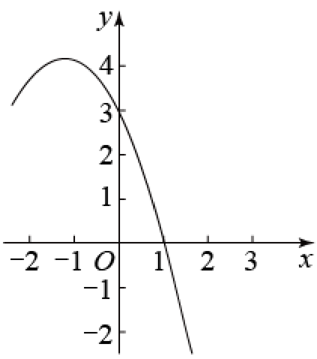
解得： $x_1=-1,x_2=5$



根据图象可知，当$x \le -1$或$x \geqslant 5$时，$y \le 1$

【点睛】本题考查了二次函数的性质，求抛物线与坐标轴的交点，根据函数图象求不等式的解集，数形结合是解题的关键．

7．（2022秋·浙江绍兴·九年级校考阶段练习）已知抛物线$y=-x^2+bx+c$的部分图象如图所示．



(1)求b，c的值；

(2)直接写出该二次函数当$y>0$时，x的取值范围．

【答案】(1)$b=-2$，$c=3$；

(2)$-3<x<1$

【分析】（1）由函数的图象可知，抛物线$y=-x^2+bx+c$过点$(0,3)$和$(1,0)$，然后利用待定系数法求出b，c的值即可；

（2）由抛物线解析式求出抛物线的对称轴以及它与x轴的另一交点坐标，然后根据抛物线开口向下，$y>0$时，函数的图象位于x轴的上方得出答案．

【详解】（1）解：由函数的图象可知，抛物线$y=-x^2+bx+c$过点$(0,3)$和$(1,0)$，

将$(0,3)$，$(1,0)$代入$y=-x^2+bx+c$得：$\begin{cases} c=3 \\ -1+b+c=0 \end{cases}$，

解得：$b=-2$，$c=3$；

（2）解：由（1）可知抛物线解析式为$y=-x^2-2x+3$，

∴对称轴为$x=-1$，

∴抛物线与x轴的另一交点坐标为$(-3,0)$，

∵抛物线开口向下，$y>0$时，函数的图象位于x轴的上方，

∴当$y>0$时，x的取值范围为$-3<x<1$．

【点睛】本题考查了待定系数法的应用，二次函数的图象和性质，熟练掌握数形结合思想的应用是解题的关键．

8．（2022秋·浙江杭州·九年级校考阶段练习）已知二次函数$y=ax^2+bx-3$(a，b

是常数，且$a\neq 0$)的图象经过点$\left(2,-3\right)$.

(1)求该函数图象的对称轴；

(2)若该函数图象还经过点$\left(3,0\right)$

①求该函数的解析式；

②当$y<0$时，直接写出x的取值范围.

【答案】(1) $x=1$

(2)① $y=x^2-2x-3$；② $-1<x<3$

【分析】（1）根据解析式可知抛物线与y轴交于点$\left(0,-3\right)$，而$\left(0,-3\right)$与$\left(2,-3\right)$关于抛物线的对称轴对称，即可求得对称轴为直线$x=1$；

（1）①根据（1）的结论得出$b=-2a$，则抛物线解析式为$y=ax^2-2ax-3$，将点$\left(3,0\right)$代入解析式，待定系数法求解析式即可求解；

②令$y=0$，求得抛物线与x轴的交点坐标，进而根据$a>0$以及$y<0$，即可求得不等式的解集.

【详解】（1）解：由$y=ax^2+bx-3$，令$x=0$，解得：$y=-3$

∴抛物线与y轴交于点$\left(0,-3\right)$，

而$\left(0,-3\right)$与$\left(2,-3\right)$关于抛物线的对称轴对称，

∴抛物线的对称轴为直线$x=1$；

（2）解：∵抛物线的对称轴为直线$x=1$；

∴$-\dfrac{b}{2a}=1$，即$b=-2a$，

∴抛物线解析式为$y=ax^2-2ax-3$，

∵抛物线还经过点$\left(3,0\right)$；

∴$0=9a-6a-3$

解得：$a=1$，

∴抛物线解析式为$y=x^2-2x-3$，

令$y=0$，即$x^2-2x-3=0$，

解得：$x_1=-1,x_2=3$

∵$a=1>0$，抛物线开口向上，

∴当$y<0$时，$-1<x<3$.

【点睛】本题考查了根据对称性求对称轴，待定系数法求二次函数解析式，图象法求不等式的解集，掌握二次函数图象的性质是解题的关键.

9．（2023·浙江·九年级专题练习）已知二次函数$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$．

(1)若$a=-1$，且函数图象经过$\left(0,3\right)$，$\left(2,-5\right)$两点，求此二次函数的解析式；并根据图象直接写出函数值$y\geq 3$时自变量x的取值范围；

(2)在（1）的条件下，已知抛物线$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$与$x$轴交于$A$，$B$两点（点$A$在点$B$的左侧），将这条抛物线向右平移$m$（$m>0$）个单位，平移后的抛物线于$x$轴交于$C$，$D$两点（点$C$在点$D$的左侧），若$B$，$C$是线段$AD$的三等分点，求$m$的值．

(3)已知 $a=b=c=1$，当$x=p$，q（p，q是实数，$p\neq q$）时，该函数对应的函数值分别为P，Q．若$p+q=2$，求证$P+Q>6$．

【答案】(1) $y=-x^2-2x+3$，当$-2\leq x\leq 0$时，$y\geq 3$；

(2)2 或 8；

(3)见解析．

【分析】（1）利用待定系数法可求抛物线的解析式，画出函数图象，结合图象可求解；

（2）分两种情况：①当C在B的左侧时，先根据三等分点的定义得：$AC=BC=BD$，由平移m个单位可知：$AC=BD=m$，计算点A和B的坐标可得AB的长，从而得结论．②当C在B的右侧时，同理可得结论；

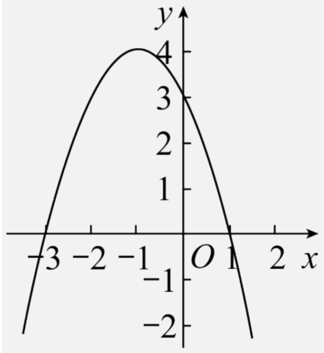
（3）由$a=b=c=1$，得$y=x^2+x+1$，容易得到$P+Q=p^2+p+1+q^2+q+1$，利用$p+q=2$，即$p=2-q$代入对代数式$P+Q$进行化简，并配方得出$P+Q=2\left(q-1\right)^2+6\geq 6$，最后注意利用$p\neq q$条件判断$q\neq 1$，得证结论．

【详解】（1）解：由题意可得：$\begin{cases} a=-1 \\ c=3 \\ 4a+2b+c=-5 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases}$，

∴抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$；

画出函数图象，如图，



当$y=3$时，$3=-x^2-2x+3$，解得$x_1=0$，$x_2=-2$，

由图象可得：当$-2\le x\le 0$时，$y\ge 3$；

（2）当$y=0$时，$0=-x^2-2x+3$，

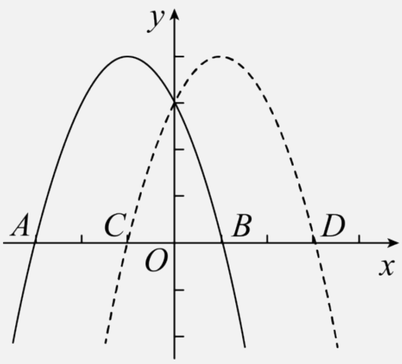
$\left(x+3\right)\left(x-1\right)=0$，

$x_1=1$，$x_2=-3$，

$\therefore A\left(-3,0\right)$，$B\left(1,0\right)$，

$\therefore AB=3+1=4$，

①如图，当C在B的左侧时，



$\because B$，C是线段AD的三等分点，

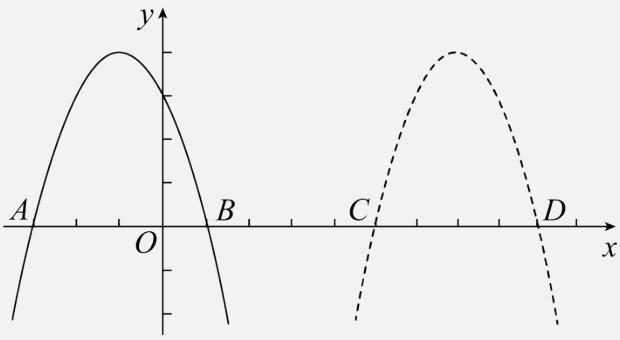
$\therefore AC=BC=BD$，

由题意得：$AC=BD=m$，

$\therefore AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=2$，

$\therefore m=2$，

②同理，当C在B的右侧时，$AB=BC=CD=4$，



$\therefore m=AB+BC=4+4=8$，

综上，m的值为 2 或 8；

（3）证明：由$a=b=c=1$，得$y=x^2+x+1$，

由题意，得$P=p^2+p+1$，$Q=q^2+q+1$，

所以$P+Q=p^2+p+1+q^2+q+1$

$=p^2+q^2+4$

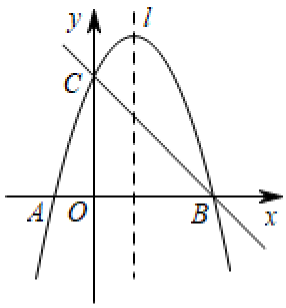
$=(2-q)^2+q^2+4$

$=2(q-1)^2+6\geq 6$，

由条件 $p\neq q$，知 $q\neq 1$．所以 $P+Q>6$，得证．

【点睛】本题查了二次函数的图象和性质，待定系数法求解析式，二次函数图象上点的坐标特征，抛物线的平移及解一元二次方程的问题，利用配方法判断代数式的取值范围，数形结合的思想的运用是解题的关键．

10．（2022 秋·浙江宁波·九年级统考期末）如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 和 $C(0,3)$ 三点．



(1)求这个二次函数及直线 BC 的函数关系式；

(2)直接写出不等式 $ax^2+bx+c<-x+3$ 的解；

(3)点 P 是抛物线对称轴 l 上的一个动点，当 $PA+PC$ 的值最小时，求点 P 的坐标．

【答案】(1) $y=-x^2+2x+3$，$y=-x+3$

(2) $x<0$ 或 $x>3$

(3)点 P 的坐标为 $(1,2)$

【分析】（1）将 A（-1，0），B（3，0），C（0，3）代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 中，即可得，设直线 BC 的函数解析式为：$y=kx+b$，将 B（3，0），C（0，3）代入 $y=kx+b$ 中，即可得；

（2）根据图象可直接得出不等式的解；

（3）由题意得 $PA=PB$，当 C、B、P 三点共线时，$PA+PC$ 最小时，根据 A 的坐标为（-1，0），B 的坐标为（3，0），即可得点 P 的横坐标为 1，将 1 代入 $y=-x+3$ 中，得 $y=-1+3=2$，即可得点 P 的坐标为（1，2）．

(1)

解：将 A（-1，0），B（3，0），C（0，3）代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$，

∴二次函数的解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

设直线 BC 的函数解析式为：$y=kx+b$，将 B（3，0），C（0，3）代入 $y=kx+b$ 中，得

$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=3 \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases}$，

∴直线 BC 的函数解析式为：$y=-x+3$；

(2)

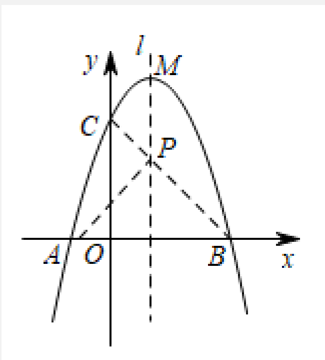
解：由（1）可知，二次函数的解析式为：$y=-x^2+2x+3$

Q 点 B 的坐标为$(3,0)$，点 C 的坐标为$(0,3)$

∴由图象可直接得出不等式$-x^2+2x+3<-x+3$的解集为：$x<0$ 或 $x>3$

(3)

解：如图所示，



∵直线 l 是抛物线的对称轴，且 A，B 是抛物线与 x 轴的交点，

∴点 A，B 关于直线 l 对称，

∴$PA=PB$，

∴当 C、B、P 三点共线时，$PA+PC$ 最小时，

即点 P 就是直线 BC 与 l 的交点，

∵A 的坐标为（-1，0），B 的坐标为（3，0），

∴点 P 的横坐标为 1，

将 1 代入 $y=-x+3$ 中，得 $y=-1+3=2$，

∴点 P 的坐标为（1，2）.