

北京市牛栏山一中 2024 届高考压轴卷数学试题试卷

注意事项

- 1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
- 2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
- 3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
- 4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 05 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
- 5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

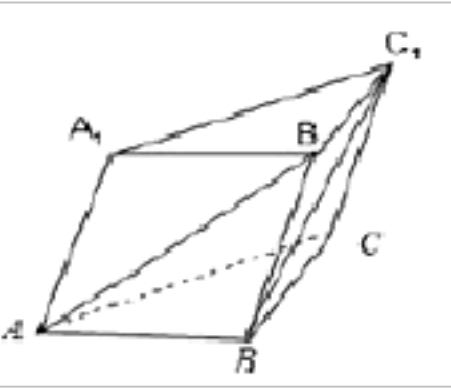
1. 要排出高三某班一天中，语文、数学、英语各 2 节，自习课 1 节的功课表，其中上午 5 节，下午 2 节，若要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻（注意：上午第五节和下午第一节不算相邻），则不同的排法种数是（ ）

- A. 84 B. 54 C. 42 D. 18

2. 设集合 $U = \mathbb{R}$ （ $\mathbb{R}$ 为实数集）， $A = \{x | x \geq 0\}$ ， $B = \{x | x \leq 1\}$ ，则 $A \cap C_U B =$ （ ）

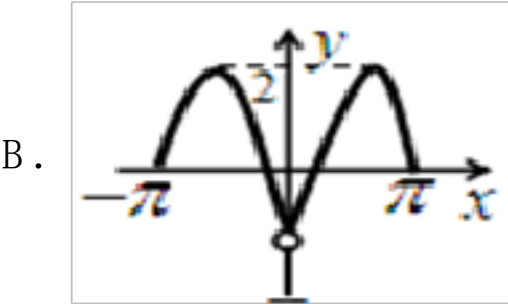
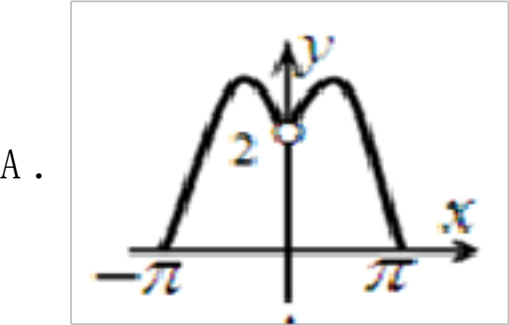
- A. $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | 0 \leq x < 1\}$ C. $\{x | x \leq 1\}$ D. $\{x | x \geq 0\}$

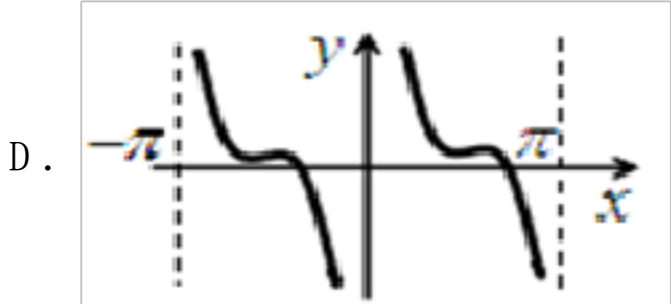
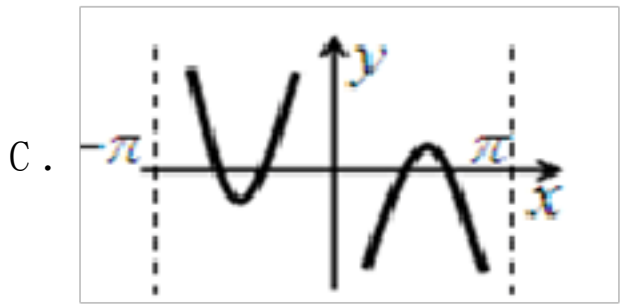
3. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长都相等， $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$ ，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为（ ）



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. 函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq 0$) 的图象是（ ）





5. 若向量 $\vec{m} = (0, 2)$, $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1)$, 则与 $2\vec{m} - \vec{n}$ 共线的向量可以是 ()

- A. $(\sqrt{3}, 1)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 1)$ D. $(1, \sqrt{3})$

6. 已知盒中有 3 个红球, 3 个黄球, 3 个白球, 且每种颜色的三个球均按 A, B, C 编号, 现从中摸出 3 个球 (除颜色与编号外球没有区别), 则恰好不同时包含字母 A, B, C 的概率为 ()

- A. $\frac{17}{21}$ B. $\frac{19}{28}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{28}$

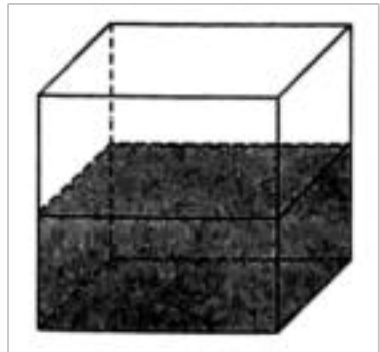
7. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leq 0 \\ x - y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - 2y$ 的最大值为 ()

- A. 5 B. 9 C. 6 D. 12

8. 抛物线 $y^2 = ax (a > 0)$ 的准线与双曲线 $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条渐近线所围成的三角形面积为 $2\sqrt{2}$, 则 a 的值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2

9. 一个封闭的棱长为 2 的正方体容器, 当水平放置时, 如图, 水面的高度正好为棱长的一半. 若将该正方体绕下底面 (底面与水平面平行) 的某条棱任意旋转, 则容器里水面的最大高度为 ()



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

10. 命题 “ $x \in (0, 1) \Rightarrow x < \ln x$ ” 的否定是 ()

- A. $x \in (0, 1) \Rightarrow x < \ln x$ B. $x_0 \in (0, 1) \Rightarrow x_0 < \ln x_0$
C. $x_0 \in (0, 1) \Rightarrow x_0 < \ln x_0$ D. $x_0 \in (0, 1) \Rightarrow x_0 < \ln x_0$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是线段 BC 上任意一点, $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 则 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $AA_1 = \sqrt{3}$, 则直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

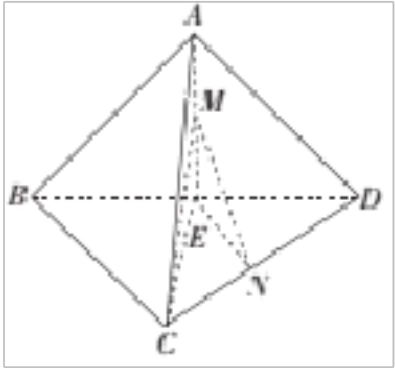
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $\angle PAB = 90^\circ$. 若四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点在以 4 为半径的同一球面上，当 PA 最长时，则 $\angle PDA$ _____；四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为_____.

14. 有 2 名老师和 3 名同学，将他们随机地排成一行，用 X 表示两名老师之间的学生人数，则 $X=1$ 对应的排法有_____种； E _____；

15. 设变量 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 4 \leq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$$
，则目标函数 $z = x + 2y$ 的最小值为_____.

16. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，点 E 在 BD 上， $EA = EB = EC = ED$ ， $BD = \sqrt{2}CD$ ， $\triangle ACD$ 为正三角形，点 M, N 分别在 AE, CD 上运动（不含端点），且 $AM = CN$ ，则当四面体 $C-EMN$ 的体积取得最大值 $\frac{2}{3}$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

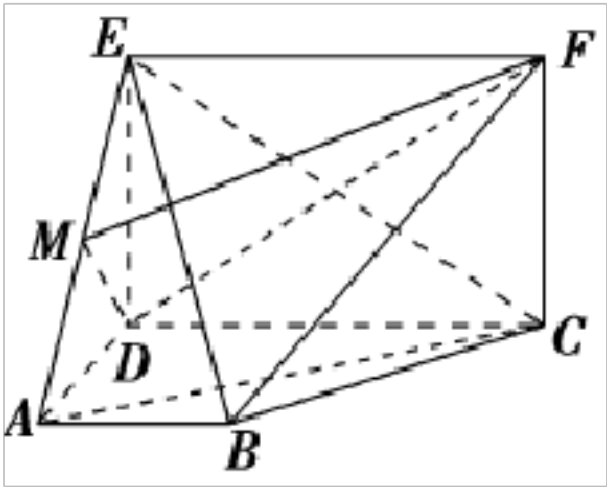
17. (12 分) 在① $A_5 = B_3$ ，② $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \frac{4}{B_2}$ ，③ $B_5 = 35$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并_____.

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 0$)，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $2d$. 设 A_n, B_n 分别是数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和，且

$b_1 = 3, A_2 = 3$, _____,

- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式；
- (2) 设 $c_n = 2^{a_n} \cdot \frac{3}{b_n b_{n+1}}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分) 如图，矩形 $CDEF$ 和梯形 $ABCD$ 所在的平面互相垂直， $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AB = AD = \frac{1}{2}CD$ ， $BE \perp DF$.



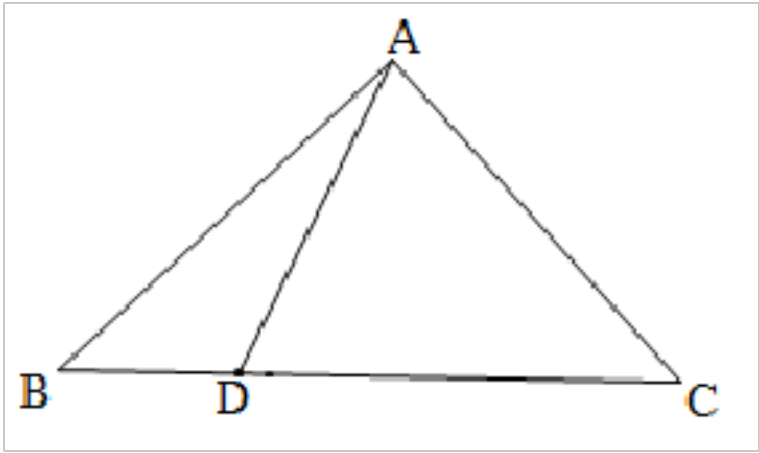
- (1) 若 M 为 EA 的中点，求证： $AC \parallel \text{平面 } MDF$ ；
- (2) 若 $AB = 2$ ，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积．

19. (12 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，若矩阵 $M = BA$ ，求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} ．

20. (12 分) 设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ， AB 为抛物线 C 过焦点 F 的弦，已知以 AB 为直径的圆与 l 相切于点 $(-1, 0)$ ．

- (1) 求 p 的值及圆的方程；
- (2) 设 M 为 l 上任意一点，过点 M 作 C 的切线，切点为 N ，证明： $MF = NF$ ．

21. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ ， D 是边 BC 上一点，且 $AD = 5$ ， $\cos \angle ADC = \frac{3}{5}$ ．



- (1) 求 BD 的长；
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 14，求 AC 的长．

22. (10 分) 联合国粮农组织对某地区最近 10 年的粮食需求量部分统计数据如下表：

年份	2010	2012	2014	2016	2018
需求量（万吨）	236	246	257	276	286

(1) 由所给数据可知，年需求量与年份之间具有线性相关关系，我们以“年份—2014”为横坐标 x ，“需求量—257”为纵坐标 y ，请完成如下数据处理表格：

年份—2014			0		
---------	--	--	---	--	--

需求量—257			0		
---------	--	--	---	--	--

（2）根据回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 分析，2020 年联合国粮农组织计划向该地区投放粮食 300 万吨，问是否能够满足该地区的粮食需求？

参考公式：对于一组数据 x_1, y_1 , x_2, y_2 , ..., x_n, y_n , 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分

别为： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

参考答案

一、 选择题： 本题共2小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 C

【解题分析】

根据题意，分两种情况进行讨论：①语文和数学都安排在上午；②语文和数学一个安排在上午，一个安排在下午.分别求出每一种情况的安排方法数目，由分类加法计数原理可得答案.

【题目详解】

根据题意，分两种情况进行讨论：

①语文和数学都安排在上午，要求 2 节语文课必须相邻且 2 节数学课也必须相邻，将 2 节语文课和 2 节数学课分别捆绑，然后在剩余 3 节课中选 1 节到上午，由于 2 节英语课不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_1^3 A_2^2 A_2^2}{A_2^2} = 18$ 种；

②语文和数学都一个安排在上午，一个安排在下午.

语文和数学一个安排在上午，一个安排在下午，但 2 节语文课不加以区分，2 节数学课不加以区分，2 节英语课也不加以区分，此时，排法种数为 $\frac{C_1^2 A_2^2 A_2^2}{A_2^2} = 24$ 种.

综上所述，共有 $18 + 24 = 42$ 种不同的排法.

故选：C .

【题目点拨】

本题考查排列、组合的应用，涉及分类计数原理的应用，属于中等题.

2、A

【解题分析】

根据集合交集与补集运算,即可求得 $A \cap C_U B$.

【题目详解】

集合 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x | x \geq 0\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$

所以 $C_U B = \{x | x > 1\}$

所以 $A \cap C_U B = \{x | x > 1\} \cap \{x | x \geq 0\} = \{x | x > 1\}$

故选:A

【题目点拨】

本题考查了集合交集与补集的混合运算,属于基础题.

3、B

【解题分析】

设 $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 根据向量线性运算法则可表示出 $\overrightarrow{AB_1}$ 和 $\overrightarrow{BC_1}$; 分别求解出 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$ 和 $|\overrightarrow{AB_1}|$, $|\overrightarrow{BC_1}|$,

根据向量夹角的求解方法求得 $\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle$, 即可得所求角的余弦值.

【题目详解】

设棱长为 1, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$

由题意得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$

又 $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{c} + 2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c}^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

即异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

本题正确选项: B

【题目点拨】

本题考查异面直线所成角的求解，关键是能够通过向量的线性运算、数量积运算将问题转化为向量夹角的求解问题.

4、 B

【解题分析】

先判断函数的奇偶性，再取特殊值，利用零点存在性定理判断函数零点分布情况，即可得解.

【题目详解】

由题可知 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

$$f(-x) = -x - \frac{1}{-x} \sin(-x) = -x + \frac{1}{x} \sin x = f(x),$$

$f(x)$ 是偶函数，关于 y 轴对称，

排除 C，D.

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi} < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} > 0,$$

$f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 必有零点，排除 A.

故选：B.

【题目点拨】

本题考查了函数图象的判断，考查了函数的性质，属于中档题.

5、 B

【解题分析】

先利用向量坐标运算求出向量 $2\vec{m} - \vec{n}$ ，然后利用向量平行的条件判断即可.

【题目详解】

$$\because \vec{m} = (0, 2), \vec{n} = (\sqrt{3}, 1)$$

$$2\vec{m} - \vec{n} = (\sqrt{3}, 3)$$

$$(1, \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sqrt{3}, 3)$$

故选 B

【题目点拨】

本题考查向量的坐标运算和向量平行的判定,属于基础题,在解题中要注意横坐标与横坐标对应,纵坐标与纵坐标对应,切不可错位.

6、B

【解题分析】

首先求出基本事件总数，则事件“恰好不同时包含字母A，B，C”的对立事件为“取出的3个球的编号恰好为字母A，B，C”，记事件“恰好不同时包含字母A，B，C”为E，利用对立事件的概率公式计算可得；

【题目详解】

解：从9个球中摸出3个球，则基本事件总数为 $C_9^3=84$ （个），
则事件“恰好不同时包含字母A，B，C”的对立事件为“取出的3个球的编号恰好为字母A，B，C”
记事件“恰好不同时包含字母A，B，C”为E，则 $P(E)=1-\frac{3^3}{C_9^3}=\frac{19}{28}$ 。

故选：B

【题目点拨】

本题考查了古典概型及其概率计算公式，考查了排列组合的知识，解答的关键在于正确理解题意，属于基础题。

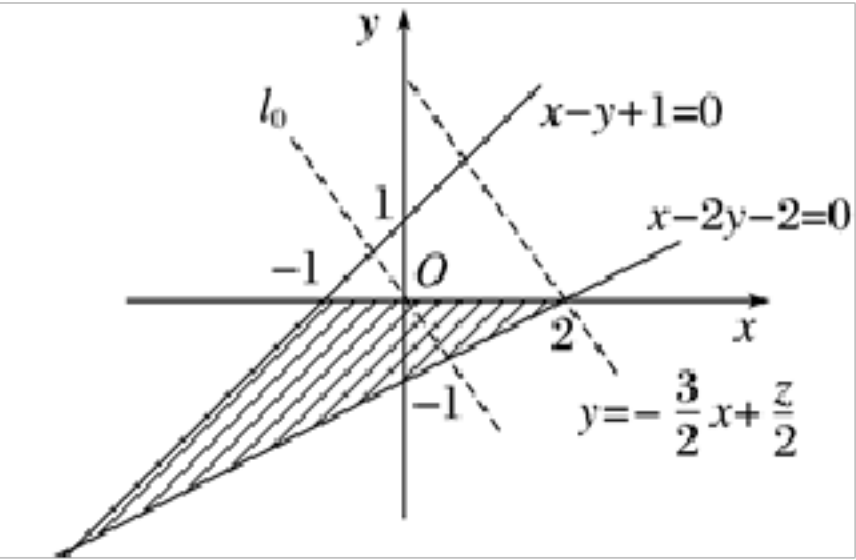
7、C

【解题分析】

作出不等式组所表示的可行域，平移直线 $z=3x-2y$ ，找出直线在y轴上的截距最大时对应的最优解，代入目标函数计算即可。

【题目详解】

作出满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2\leq 0 \\ x-y+1\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ 的可行域如图阴影部分（包括边界）所示。



由 $z=3x-2y$ ，得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ ，平移直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ ，当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 经过点 $(2, 0)$ 时，该直线在y轴上的截距最大，此时z取最大值，
即 $z_{\max}=3\times 2-2\times 0=6$ 。

故选：C.

【题目点拨】

本题考查简单的线性规划问题，考查线性目标函数的最值，一般利用平移直线的方法找到最优解，考查数形结合思想的应用，属于基础题.

8、A

【解题分析】

求得抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，解得两交点，由三角形的面积公式，计算即可得到所求值.

【题目详解】

抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 的准线为 $x=-\frac{a}{4}$ ，双曲线 $C:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ 的两条渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，可得两交点为 $(-\frac{a}{4},-\frac{\sqrt{2}a}{8}),(-\frac{a}{4},\frac{\sqrt{2}a}{8})$ ，即有三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{a}{4}\times\frac{\sqrt{2}a}{4}=2\sqrt{2}$ ，解得 $a=8$ ，故选 A.

【题目点拨】

本题考查三角形的面积的求法，注意运用抛物线的准线方程和双曲线的渐近线方程，考查运算能力，属于基础题.

9、B

【解题分析】

根据已知可知水面的最大高度为正方体面对角线长的一半，由此得到结论.

【题目详解】

正方体的面对角线长为 $2\sqrt{2}$ ，又水的体积是正方体体积的一半，且正方体绕下底面（底面与水平面平行）的某条棱任意旋转，所以容器里水面的最大高度为面对角线长的一半，即最大水面高度为 $\sqrt{2}$ ，故选 B.

【题目点拨】

本题考查了正方体的几何特征，考查了空间想象能力，属于基础题.

10、D

【解题分析】

根据全称命题的否定是特称命题,对命题进行改写即可.

【题目详解】

全称命题的否定是特称命题，所以命题“ $\forall x\in(0,1),e^x\leq\ln x$ ”的否定是： $\exists x_0\in(0,1),e^{x_0}>\ln x_0$. 故选 D.

【题目点拨】

本题考查全称命题的否定,难度容易.

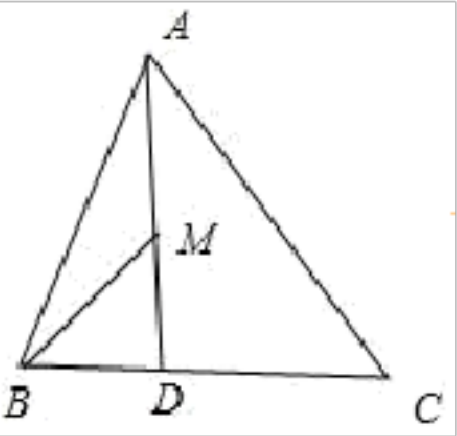
11、A

【解题分析】

设 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$ ，用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示出 $\overrightarrow{BM}$ ，求出 k 的值即可得出答案.

【题目详解】

设 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$



由 $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{k}{2} \overrightarrow{AB} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right) \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \overrightarrow{AC}, \\ &= \frac{1-k}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

故选：A

【题目点拨】

本题考查了向量加法、减法以及数乘运算，需掌握向量加法的三角形法则以及向量减法的几何意义，属于基础题.

12、C

【解题分析】

在长方体中 $AB \parallel C_1D_1$ ，得 DD_1 与平面 ABC_1D_1 交于 D_1 ，过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O，可证 $DO \perp$ 平面 ABC_1D_1 ，可得 $\angle DD_1A$ 为所求解的角，解 $Rt \triangle ADD_1$ ，即可求出结论.

【题目详解】

在长方体中 $AB \parallel C_1D_1$ ，平面 ABC_1D_1 即为平面 ABC_1D_1 ，

过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O， $\because AB \perp$ 平面 AA_1D_1D ，

$DO \perp$ 平面 AA_1D_1D ， $AB \perp DO$ ， $AB \cap AD_1 = D$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/568106073127006137>