2023-2024 学年北京市海淀区高三下学期 2 月阶段性诊断练习数学模拟试题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分）

1．若集合 $A=\{x\,|\,3-2x<5\}$，$B=\{x\,|\,x^2+4x\geq 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x\,|\,x<-1$ 或 $x\geq 0\}$　　　　B．$\{x\,|\,x\leq -4$ 或 $x>1\}$

C．$\{x\,|\,x\leq -4$ 或 $x>-1\}$　　　　D．$\{x\,|\,-1<x\leq 0\}$

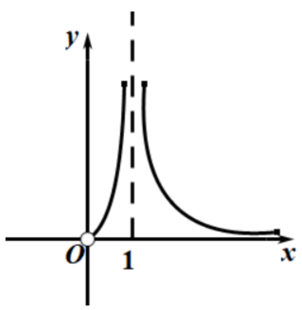
2．已知复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 的点的坐标所在象限为（　　）

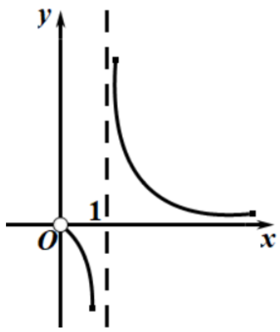
A．一　　　　B．二　　　　C．三　　　　D．四

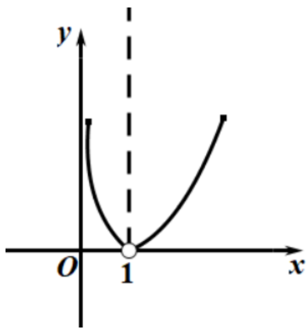
3．已知 $\vec{a}$ 为单位向量，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

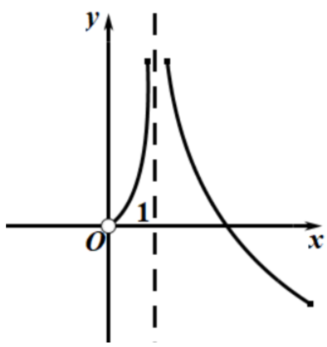
A．1　　　　B．2　　　　C．$\dfrac{1}{2}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{-2}{\ln(x+1)-x}$,则函数 $y=f(x-1)$ 的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

5．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，离心率为 $\sqrt{2}$．若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为

A．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　　　　B．$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　　　C．$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　　　　D．$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6．在$\triangle ABC$中，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，则$\angle A=$（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

7．在直角坐标系xOy内，圆$C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$，若直线$l:x+y+m=0$绕原点O顺时针旋转90°后与圆C存在公共点，则实数m的取值范围是（　　）

A．$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　B．$\left[-4-\sqrt{2},-4+\sqrt{2}\right]$

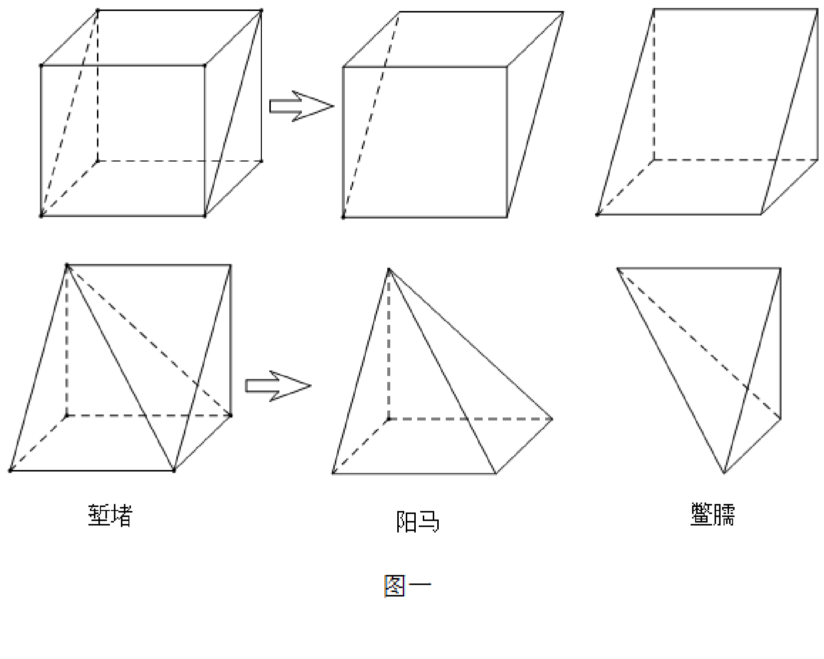
C．$\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$　　D．$\left[-2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

8．若数列$\{a_n\}$为等比数列，则“$a_3\geq 1$”是“$a_1+a_5\geq 2$”的（　　）

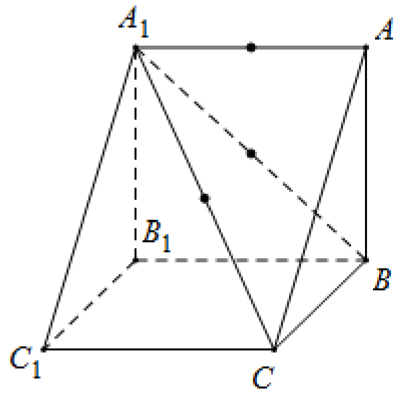
A．充要条件　　B．既不充分也不必要条件

C．充分不必要条件　　D．必要不充分条件

9．刘徽注《九章算术•商功》“斜解立方，得两堑堵.斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑.阳马居二，鳖臑居一，不易之率也.合两鳖臑三而一，验之以棊，其形露矣.”如图一解释了由一个长方体得到“堑堵”、“阳马”、“鳖臑”的过程.堑堵是底面为直角三角形的直棱柱；阳马是一条侧棱垂直于底面且底面为矩形的四棱锥；鳖臑是四个面都为直角三角形的四面体.



图一



图二

在如图二所示由正方体得到的堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，当点 P 在下列三个位置：A_1A 中点、A_1B 中点、A_1C 中点时，分别形成的四面体 $P-ABC$ 中，鳖臑有（　　）

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

10．对于定义域为 R 的函数 $f\left(x\right)$，若满足① $f\left(0\right)=0$；②当 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 0$ 时, 都有 $xf'\left(x\right)>0$；③当 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ 时，$x_1+x_2<0$，则称 $f\left(x\right)$ 为“偏对函数”. 现给出四个函数：$g\left(x\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x^2\left(x\neq 0\right)\\ 0\left(x=0\right)\end{cases}$，$h\left(x\right)=\begin{cases}\ln\left(-x+1\right)\left(x\leq 0\right)\\ 2x(x>0)\end{cases}$,$\phi\left(x\right)=-x^3+\dfrac{3}{2}x^2$；$\varphi\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-1$. 则其中是“偏对称函数”的函数个数为(　　)

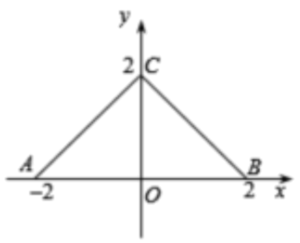
A．4　　B．3　　C．2　　D．1

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

11．设一组数据 $X:3,4,5,5,6,7,9,9$，则数据 $2X-1$ 的平均值为__________，30%分位数为________.

12．函数 $y=\dfrac{1}{x-1}-1+x(x\geq 3)$ 的最小值为__________.

13．如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，则不等式 $f\left(x\right)>\tan\dfrac{\pi}{4}x$ 的解集是__________.

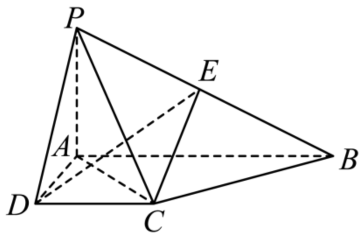


14．已知A，B是抛物线$y^2=8x$上两点，若线段AB的中点到抛物线的准线的距离为5，则直线AB的方程可能是______.（本题答案不唯一，符合题意即可）

15．定义平面向量的一种运算$\vec{a}\odot\vec{b}=|\vec{a}+\vec{b}|\times|\vec{a}-\vec{b}|\times\sin<\vec{a}$，$\vec{b}>$，其中$<\vec{a}$，$\vec{b}>$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，给出下列命题：①若$<\vec{a}$，$\vec{b}>=90^\circ$，则$\vec{a}\odot\vec{b}=\vec{a}^2+\vec{b}^2$；②若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则$(\vec{a}+\vec{b})\odot(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}\cdot\vec{b}$；③若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，则$\vec{a}\odot\vec{b}\leqslant 2|\vec{a}|^2$；④若$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,2)$，则$(\vec{a}+\vec{b})\odot\vec{b}=\sqrt{10}$．其中真命题的序号是________.

三、解答题（本题共6小题，满分85分）

16．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\,//\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$PA=AD=CD=2$，点E为PB的中点.



(1)求证：平面$PBC\perp$平面PAC;

(2)求二面角$E-CD-A$的余弦值.

17．已知函数$f(x)=a\sin\omega x\cos\omega x(a>0,\omega>0)$．从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数$f(x)$存在且唯一确定.

(1)求$f(x)$的解析式；

(2)设$g(x)=f(x)-2\cos^2\omega x+1$，求函数$g(x)$在$(0,\pi)$上的单调递增区间.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$；

条件②：$f(x)$为偶函数；

条件③：$f(x)$的最大值为1；

条件④：$f(x)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$.

18．乒乓球运动在中国风靡，成为了中国的国球体育项目．某校拟从5名优秀乒乓球爱好者

中抽选人员分批次参加社区活动．活动共分3个批次进行，每批次活动需要同时派送2名选手，且每次派送选手均从5人中随机抽选．已知这5名选手中，2人有比赛经验，3人没有比赛经验.

(1)求5名选手中的“1号选手”，在这3批次活动中有且只有一次被抽选到的概率；

(2)第二次抽选时，选到没有比赛经验的选手的人数最有可能是几人？说明理由；

(3)现在需要2名选手完成某项加赛，比赛方式为2名选手依次参赛，如果前一位选手不能获胜，则再派另一位选手．若有A、B两位选手可派，他们各自完成任务的概率分别为P_A、P_B，且$P_A > P_B$．假设各人能否完成任务相互独立，则当派出选手的人员数目的数学期望达到最小时，直接写出A、B两位选手的派遣顺序.

19．已知函数$f\left(x\right)=a\ln\left(x-1\right)+\left(a+2\right)x+1$，$a\neq 0$.

(1)讨论$f\left(x\right)$的单调性；

(2)设$g\left(x\right)=f\left(x+1\right)+2\sin x-4x-4$，$x\in(0,\dfrac{3}{2}\pi]$，求证：当$a=1$时，$y=g\left(x\right)$有且仅有两个不同的零点.

20．已知直线$y=1$与椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相切，定点$P(4,0)$和原点$O$的中点为椭圆右顶点.

(1)求椭圆方程及离心率；

(2)已知椭圆上第一象限内动点M与第三象限内动点N，定点$T(1,0)$，直线PM,PN交$y=1$于A,B两点，若$\angle OPN=\angle PAB$，求证：M,N,T三点共线.

1．C

【分析】先计算$A=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid x\geq 0或x\leq -4\}$，再计算$A\cup B$得到答案.

【详解】$A=\{x\mid 3-2x<5\}=\{x\mid x>-1\}$，$B=\{x\mid x^2+4x\geq 0\}=\{x\mid x\geq 0或x\leq -4\}$

$A\bigcup B=\{x\mid x\leq -4或x>-1\}$

故选：C

本题考查了并集的计算，属于简单题.

2．B

【分析】计算复数z，得到其对应点的坐标即可判定.

【详解】因为$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{-\mathrm{i}^2}=-1+2\mathrm{i}$，

其对应点的坐标为$\left(-1,2\right)$在第二象限，

故选：B.

3．B

【分析】根据数量积运算的公式得到关于$\left|\vec{b}\right|$的方程，求解得到结果.

【详解】$\vec{a}$为单位向量，且$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|=1$

可得$\left|\vec{b}\right|=2$

本题正确选项：B

本题考查向量数量积的运算，属于基础题.

4．A

用排除法，通过函数图像的性质逐个选项进行判断，找出不符合函数解析式的图像，最后剩下即为此函数的图像.

【详解】设$g(x)=f(x-1)=\dfrac{-2}{\ln x-x+1}$，由于$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-2}{\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}>0$，排除$B$选项；由于$g(\mathrm{e})=\dfrac{-2}{2-\mathrm{e}},g\left(\mathrm{e}^2\right)=\dfrac{-2}{3-\mathrm{e}^2}$，所以$g(e)>g\left(\mathrm{e}^2\right)$，排除$C$选项；由于当$x\to+\infty$时，$g(x)>0$，排除$D$选项. 故$A$选项正确.

故选：A

本题考查了函数图像的性质，属于中档题.

5．B

【详解】由题意得 $a=b,\frac{4}{-c}=-1\Rightarrow c=4,a=b=2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ ，选 B.

【考点】 双曲线的标准方程

【名师点睛】利用待定系数法求圆锥曲线方程是高考常见题型，求双曲线方程最基础的方法就是依据题目的条件列出关于 a,b,c 的方程，解方程组求出 a,b，另外求双曲线方程要注意巧设双曲线（1）双曲线过两点可设为 $mx^2-ny^2=1(mn>0)$，（2）与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 共渐近线的双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq0)$ ，（3）等轴双曲线可设为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$ 等，均为待定系数法求标准方程.

6．B

【分析】利用正弦定理和三角恒等变换等知识求得正确答案.

【详解】依题意，$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，

由正弦定理得 $2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin\left(B+C\right)=\sin A$，

由于 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，所以 $2\cos A=1,\cos A=\frac{1}{2}>0$，

所以A是锐角，且 $A=\frac{\pi}{3}$.

故选：B

7．A

【分析】由题意首先得出旋转后的直线为 $l_1:x-y+m=0$，然后由直线与圆的位置关系列出不等式即可求解.

【详解】连接 OP，设 $\angle POx=\theta$（即以 x 轴正方向为始边，OP 为终边的角），

由题意对于直线 $l:x+y+m=0$ 上任意一点 $P\left(x,y\right)$，存在 $a=\sqrt{x^2+y^2},\theta\in\mathrm{R}$，使得 $P\left(a\cos\theta,a\sin\theta\right)$，

则直线 $l:x+y+m=0$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后，点 $P\left(a\cos\theta,a\sin\theta\right)$ 对应点为 $P_1\left(a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),a\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)$，即 $P_1\left(a\sin\theta,-a\cos\theta\right)$，

因为 $P\left(a\cos\theta,a\sin\theta\right)$ 在直线 $l:x+y+m=0$ 上，所以满足 $a\cos\theta+a\sin\theta+m=0$

设$x_1=a\sin\theta, y_1=-a\cos\theta$，所以$-y_1+x_1+m=0$，

即$P_1\left(a\sin\theta,-a\cos\theta\right)$所在直线方程为$l_1: x-y+m=0$，

而圆$C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$的圆心，半径分别为$\left(2,2\right), r=1$，

若直线$l: x+y+m=0$绕原点O顺时针旋转90°后与圆C存在公共点，

所以圆心$C\left(2,2\right)$到直线$l_1: x-y+m=0$的距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}\le r=1$，解得$-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$.

故选：A.

关键点睛：关键是求出旋转后的直线，从而即可顺利得解.

8．C

【分析】利用等比数列性质，结合基本不等式及不等式性质，由充分、必要性定义判断充分、必要性.

【详解】若数列$\{a_n\}$的公比为q，

由$a_3=a_1q^2\ge 1$，故$a_1>0$，则$a_5=a_1q^4>0$，

所以$a_1+a_5\ge 2\sqrt{a_1a_5}=2a_3\ge 2$，当且仅当$a_1=a_5$，即$q^2=1$时取等号，故充分性成立；

由$a_1+a_5\ge 2$，故$\dfrac{a_3}{q^2}+a_3q^2\ge 2$，若$q^2=\dfrac{1}{2}$，则$a_3\ge\dfrac{4}{5}$，故必要性不成立；

故选：C

9．B

【分析】设正方体的棱长为a，分别计算出三种情况下四面体的各边长，结合线面垂直的性质以及勾股定理可判断每种情况下各个三角形是否为直角三角形，即可选出正确答案.

【详解】解：设正方体的棱长为a，则由题意知，$A_1C_1=AC=\sqrt{2}a$，$A_1B=\sqrt{2}a$，$A_1C=\sqrt{3}a$，

当P为A_1A的中点时，因为$PA\perp$面ABC，则$\angle PAC=\angle PAB=90^{\circ}$，$\angle ABC=90^{\circ}$，

则$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+a^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+2a^2}=\dfrac{3}{2}a$，又$BC=a$，则$BC^2+PB^2=PC^2$，则$\triangle PBC$是直角三角形，即此时$P-ABC$是鳖臑；

当P为A_1B的中点时，因为$BC\perp$面ABB_1A_1，所以$BC\perp PB, BC\perp AB$，

所以$\triangle PBC$, $\triangle ABC$为直角三角形，因为ABB_1A_1是正方形，所以$AP\perp BP$，

则$\triangle PAB$是直角三角形，则$PA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a, PC=\sqrt{BC^2+PB^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

又$BC=a$，由勾股定理可知，$\triangle PBC$不是直角三角形，则此时$P-ABC$不是鳖臑；

当P为A_1C的中点时，此时$PA=PC=\dfrac{1}{2}A_1C=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$，又$AC=\sqrt{2}a$，由勾股定理可知，

$\triangle PAC$不是直角三角形，则此时$P-ABC$不是鳖臑；

故选:B.

本题考查了线线垂直的判定，考查了线面垂直的性质. 本题的关键是证明线线垂直.

10．C

【分析】根据“偏对称函数”的定义，逐项判断四个函数是否满足条件①②③，对于条件②可转化为函数在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上的单调性进行求解，根据奇偶性可判断函数$g(x)$的单调性，根据分段函数的性质及基本初等函数的单调性可判断$h(x)$的单调性，利用导数判断函数$\phi(x)$及函数$\varphi(x)$是否满足条件②即可，对于条件③，通过构造函数，利用导数求解函数的单调性及最值，即可判断$h(x),\varphi(x)$是否满足条件③.

【详解】解：由题可知，$g(0)=0,h(0)=0,\phi(0)=0,\varphi(0)=0$，故函数$g(x),h(x),\phi(x),\varphi(x)$都满足条件①，

对于条件②等价于函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

当$x\neq 0$时，$g(x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)x^2$，则$g(-x)=\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)(-x)^2=-g(x)$，

故$g(x)$是奇函数，则$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调性相同，故$g(x)$不满足条件②，

因为$h(x)=\begin{cases}\ln(-x+1)(x\leq 0)\\ 2x(x>0)\end{cases}$，故$h(x)$在区间$(-\infty,0)$单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$h(x)$满足条件②，

因为$\phi'(x)=-3x^2+3x, x\phi'(x)=-3x^3+3x^2=-3x^2(x-1)$, 当$x>1$时，$x\phi'(x)<0$，所以$\phi(x)$不满足条件②，