第三章排列、组合与二项式定理

3.1.3组合与组合数

人教B版(2019)

课标要点	核心素养
1. 理解组合的意义	数学抽象
2. 明确组合与排列的区别及联系	数学运算
3. 掌握组合数公式及组合数的基本性质	数学运算

尝试与发现

下面这两个计数问题的答案一样吗?

(1)小张要在3所大学中选择2所，分别作为自己的第一志愿和第二志愿，小张共有多少种不同的选择方式?

(2)小张要在3所大学中选择2所，作为自己努力的目标，小张共有多少种不同的选择方式?

选择合适的符号，分别表示出上述两题中所有的选择方式，并总结两者之间的关系.

不难看出，两个问题中：前者选出两所学校后，还要指定一所作为第一志愿，另一所作为第二志愿；而后者只需要选出两所学校即可. 换句话说，前者选出的学校是要排列顺序的，而后者选出的学校不需要排列顺序.

尝试与发现(1)中的事情，可以分成两步来完成：第一步，完成(2)中的事情，即选择两所学校；第二步，将选出的两所学校做全排列(共有 A2 种方法). 因为问题(1)的答案是A^3, 所以如果设问题(2)的答案是 x ,那么根据上述分析和分步乘法计数原理可知 A3=xA2, 从 而$x=\frac{A_3^2}{A_2^2}=\frac{3\times 2}{2\times 1}=3$.

1. 组合与组合数

一般地，从 n 个不同对象中取出 m $(m\leq n)$ 个对象并成一组，称为从 n 个不同对象中取出 m 个对象的一个组合.

尝试与发现的问题(2)中，如果用 A,B,C 表示3所学校，$\{A,B\}$ 表示选择学校 A 和 B 作为目标，则 $\{A,B\}$ 就是一个组合，且(2)中的3种选择方式也就是3种组合分别为：$\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}$.

从 n 个不同对象中取出 m 个对象的所有组合的个数，称为从n 个不同对象中取出m 个对象的组合数，用符号 Cm 表示.

注 意：(1)所谓并成一组是指与顺序无关，例如，组合a, b 与组合 b, a 是同一组合，可以把一个组合看成一个集合.

(2)同符号 Am 一样，在符号 Cm 中，总是要求 n 和 m 都是正整数，且 $m \le n$，以后也不再声明.

尝试与发现的问题(2)实际上就是求组合数 C3, 由此可以知道 $C_3^2=\frac{A_3^2}{A_2^2}=3$.

实际生活中，有大量涉及组合数的情况.例如，从15名学生中选择3人去参加学生代表大会，共有 Cì5 种不同的选择方法；从10名教师中指派7人去参加教学交流，有 C7。种不同的指派方法等.

考虑到从 n 个不同对象中取出m 个做排列，可以分成两个步骤来完成：第一步，从n 个不同对象中取出 m 个，有 Cm 种选法；第二步，将选出的 m 个对象做全排列，有 Am 种排法. 由分步乘法计数原理有 Am=Cm Am ,所 以

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m\times(m-1)\times\cdots\times2\times1}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

. 上述公式称为组合数公式.

中

由组合数公式，分别取 m=0, m=1, m=n, 可 得

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1, \quad C_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n, \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1$$

例 1 已知一个平面内有10个点，其中任意3点都不共线，且任意两点所连成的线段中，任意两条线段的长度都不相等：

(1)这些点共可以连成多少条不同的线段?

(2)以这些点为端点共可以作出多少个不同的非零向量?

解：(1)因为已知的点中，任意3点都不共线，而任意两点都能连成一条线段，所以共可以连成的不同线段条数为$C_{10}^{2}=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$.

(2)因为以任意一点为始点、另一点为终点，均可作出一个非零向量，而且连成的所有线段中，任意两条线段的长度都不相等，因此共可以作出不同的非零向量个数为 $A_{10}^{2}=10\times9=90$.

例2 计算：

(1)C^{3}+C4;　　　　　　(2)C_{10}C10-C10

解：（1）$C_7^3+C_7^4=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}+\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35+35=70$.

（2）$C_{10}^5C_{10}^0\text{-}C_{10}^{10}=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}\times1-1=252-1=251$.

尝试与发现

在了解敬老院可以进行哪些爱心活动的走访中，老师要将5位同学分成两组，一组2人，另一组3人.老师要完成分组，有两种不同的做法：

(1)选出2人作为一组，另外3人是另一组；

(2)选出3人作为一组，另外2人是另一组

用组合数符号分别表示(1)和(2)所得的分法种数，说明所得结果之间的关系，并将结果推广到一般情况.

根据组合和组合数公式可知，(1)和(2)得的分法种数分别为 C^2 和 C^3，而

日H $C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$，$C_5^3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$ 因此 $C^2=C$.

2. 组合数的性质

一般地，有 $C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!m!}$, $C_n^{n-m}=\frac{n!}{[n-(n-m)]!(n-m)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$,

因此 $\boxed{Cm=Cn\text{-}m}$

当 $m>\frac{n}{2}$ 时，将计算 Cm 转化为计算 Cn-m 会更简便，

例如 $C_{10}^7=C_{10}^{10-7}=C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$.

个 于 一 d日

C

例 3 一个口袋里有7个不同的白球和1个红球，从中取5个球：

(1)共有多少种不同的取法?

(2)如果不取红球，共有多少种不同的取法?

(3)如果必须取红球，共有多少种不同的取法?

解：(1) 因为共有8个球，所以共有不同的取法种数为C，

且$C_8^5=C_8^{8-5}=C_8^3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$.

(2) 因为不取红球，所以只要在7个白球中取5个球即可，

所以共有不同的取法种数为$C_7^5=C_7^{7-5}=C_7^2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

(3) 因为必须取红球，所以只需在7个白球中再取4个球即可，

所以共有不同的取法种数为$C_7^4=C_7^{7-4}=C_7^3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

$$C_n^{m+1}+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}.$$

3. 组合数的应用

例 4 现有30件分别标有不同编号的产品，且除了2件次品外，其余都是合格品，从中取出3件：

(1)一共有多少种不同的取法?

(2)若取出的3件产品中恰有1件次品，则不同的取法共有多少种?

(3)若取出的3件产品中至少要有1件次品，则不同的取法共有多少种?

解 ：(1)所求的取法总数，就是从30件产品中取出3件的组合数

$$C_{30}^{3}=\frac{30\times 29\times 28}{3\times 2\times 1}=4060.$$

(2)抽取可以分成两步完成：第一步，在2件次品中取出1件，有 C^2 种方法；

第二步，在28件合格品中取出2件，有 C28 种方法.

因此取法种数为$C_{2}^{1}C_{28}^{2}=2\times\frac{28\times 27}{2\times 1}=756$.

(3)满足条件的取法可以分成两类：恰有1件次品的取法和恰有2件次品的取法.

恰有1件次品的取法有 C2C28种，恰有2件次品的取法有C2C28 种.

因此取法种数为$C_{2}^{1}C_{28}^{2}+C_{2}^{2}C_{28}^{1}=2\times\frac{28\times 27}{2\times 1}+1\times 28=784$.

例 5 要把9本不同的课外书分给甲、乙、丙3名同学：

(1) 如果每个人都得3本，则共有不同的分法多少种?

(2) 如果要求一人得4本， 一人得3本， 一人得2本，则共有不同的分法多少种?