

河北省承德市双滦区实验中学 2024—2025 学年高三上学期

12 月月考数学试卷

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 对于非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} // \vec{b}$ 是 $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$ 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $(a-i)(2+i) = b-i^3$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 则复数 $a+bi$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 圆 $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$ 关于直线 $ax - by + 6 = 0$ ($a > 0, b > 0$) 对称, 则 $\frac{2}{a} + \frac{6}{b}$ 的最小值是

()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{20}{3}$ C. $\frac{32}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

4. 若 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha = m$, $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2}$, 则 $\tan \beta =$ ()

- A. $\frac{m}{2}$ B. $-\frac{m}{2}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $-\frac{m}{3}$

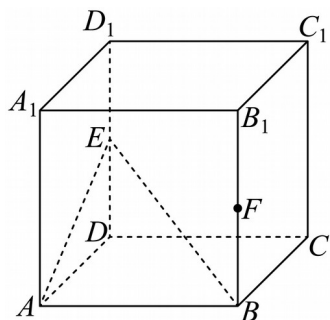
5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $-a_1, \frac{3}{4}a_2, a_3$ 成等差数列, 若

$a_1 = 1$, 则 $S_4 =$ ()

- A. $\frac{5}{8}$ 或 15 B. 15 C. $\frac{5}{8}$ 或 $^{-15}$ D. $\frac{5}{8}$

6. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, E, F 分别是 DD_1, BB_1 的中点. 用过点 F 且

平行于平面 ABE 的平面去截正方体, 得到的截面图形的面积为 ()



- A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

7. 若函数 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} - m$ 有零点, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $[0, 1)$ C. $(-\infty, 1]$ D. $[-1, +\infty)$

8. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-3} < 0\right\}$, $B = \{x \mid \log_2 x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[0, 3)$ B. $(0, 3)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-1, 4]$

二、多选题

9. 如果 $a < b < 0, c < d < 0$, 那么下面一定成立的是 ()

- A. $a+d < b+c$ B. $ac > bd$ C. $ac^2 > bc^2$ D. $\frac{d}{a} < \frac{c}{a}$

10. 已知函数 $f(x) = x \ln(1+x)$, 则 ()

- A. $f(x)$ 是偶函数

B. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 处切线的斜率为 $-1-\ln 2$

C. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

D. $f(\log_2 3) - f(1) > 0$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与 x 轴的交点, 点 P 为该平面内异

于 A, B 的动点, 且直线 AP 与直线 BP 的斜率之积为 m , 设动点 P 的轨迹为曲线 C , 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $m = -1$, 则曲线 C 方程为 $x^2 + y^2 = 4$

B. 若 $m = 1$, 则曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$

C. 若 $m = 1$, 则曲线 C 有渐近线, 其渐近线方程为 $y = \pm x$

D. 若 $m = -\frac{1}{4}$, $F(\sqrt{3}, 0)$, 过原点的直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 则 $\triangle FMN$ 面积最大

值为 $\sqrt{3}$

三、填空题

12. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 满足 $f(x+2) = f(-x)$, 且当 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 为单调递增

函数, 则满足 $f(2x) < f(x)$ 的 x 的取值范围为__.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 若 $a_2 \cdot a_6 \cdot a_{10} = 3\sqrt{3}$, $b_1 + b_6 + b_{11} = 7\pi$,

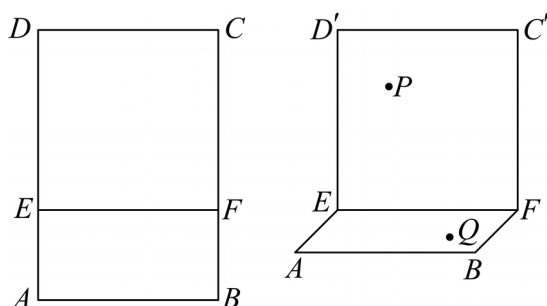
则 $\tan \frac{b_2 + b_{10}}{1 - a_3 \cdot a_9}$ 的值是__.

14. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=3$, 其中 E , F 分别为边 AD , BC 上的点,

且 $EF \parallel AB$, $DE=2AE$. 将四边形 $CDEF$ 折起至四边形 $C'D'EF$, 使平面 $C'D'EF$ 与平面

$ABFE$ 垂直. 动点 P 在四边形 $C'D'EF$ 及其内部运动, 动点 Q 在四边形 $ABFE$ 及其内部运动.

给出下列四个结论:



①存在点 P , Q , 使得 $PQ=3$;

②存在点 P , Q , 使得 $BP \parallel C'Q$;

③到直线 AB 和 $D'E$ 的距离相等的点 P 有无数个;

④若 $BP \perp EP$, 则四面体 $BE PQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

四、解答题

15. 已知函数 $f(x) = (a-1)x + e^x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论函数 $y = f(x)$ 的单调性;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - \sin x$, 若函数 $y = g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 求实数 a 的取值范围.

16. 设 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$).

(1) 当函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 2π 时, 求 $y = f(x) + \cos x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值;

(2) 若 $\omega = 2$, 且在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边长为 a 、 b 、 c , 锐角 A 满足

$$f\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4, \quad \text{求 } a \text{ 的最小值.}$$

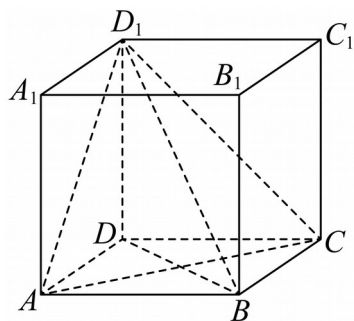
17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 4 - \frac{4}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: $\left\{\frac{1}{a_n - 2}\right\}$ 是等差数列;

(2) 若 $a_n b_n = 2(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n \cdot 2^{b_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 如图, 已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$$AB = AA_1 = 2, \quad AD_1 = 2\sqrt{2}, \quad BD_1 \perp AC.$$



(1) 若 E 为 BB_1 中点, 证明: $DE \perp$ 平面 ACD_1 ;

(2) 在线段 BB_1 上是否存在点 F , 使得平面 ACD_1 与平面 CDF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{195}}{65}$, 若

存在, 求出 $\frac{BF}{BB_1}$; 若不存在, 请说明理由.

19. 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其右顶点 $A(2,0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)若直线 $l: y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N (M, N 不与左、右顶点重

合), 且 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{NA} = 0$. 求证: 直线 l 过定点, 并求出定点的坐标.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	C	B	B	A	B	BD	BCD
题号	11									
答案	BCD									

1. B

【分析】根据共线向量的条件，以及充分条件和必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】因为 $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{b} \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$ ，反之 $\vec{a} // \vec{b}$ 不能推出 $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$

所以 $\vec{a} // \vec{b}$ 是 $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$ 必要不充分条件.

故选: B.

2. A

【分析】先根据复数的乘法运算化简，再应用复数相等求参，最后应用复数的几何意义得出点所在的象限.

【详解】由题得 $2a+1-2i+ai=b+i$ ，

$$\text{则} \begin{cases} 2a+1=b \\ a-2=1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases},$$

则 $a+bi=3+7i$ ，其在复平面内对应的点为 $(3,7)$ 位于第一象限.

故选: A.

3. C

【分析】先求出圆的圆心坐标，根据条件可得直线过圆心，从而可得 $a+3b=3$ ，再结合基本不等式“1”的妙用方法计算即可得解.

【详解】由圆 $x^2+y^2+4x-12y+1=0$ 可得标准方程为 $(x+2)^2+(y-6)^2=39$ ，

因为圆 $x^2+y^2+4x-12y+1=0$ 关于直线 $ax-by+6=0(a>0, b>0)$ 对称，

∴

该直线经过圆心 $(-2,6)$ ，即 $-2a-6b+6=0$ ，∴ $a+3b=3(a>0, b>0)$ ，

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{6}{b} = \frac{2}{3}(a+3b) \left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b} \right) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3a}{b} + \frac{3b}{a} + 9 \right) \geq \frac{2}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{3a}{b} \cdot \frac{3b}{a}} \right) = \frac{32}{3},$$

当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{3a}{b}$ 即 $a = b = \frac{3}{4}$ 时取等号,

所以 $\frac{2}{a} + \frac{6}{b}$ 的最小值为 $\frac{32}{3}$.

故选: C.

4. C

【分析】利用两角和与差的正弦公式化简, 再根据商数关系弦化切, 即可求解.

【详解】由题意 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{2}$, 即 $2\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, 化简得

$$\sin\alpha\cos\beta = 3\cos\alpha\sin\beta,$$

因为 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, 等式两边同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$,

得 $\tan\alpha = 3\tan\beta$, 又 $\tan\alpha = m$, 故 $\tan\beta = \frac{m}{3}$.

故选: C

5. B

【分析】由题意设出公比, 根据等差中项的性质建立方程, 可得答案.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 则 $q > 0$,

由 $-a_1, \frac{3}{4}a_2, a_3$ 为等差数列, 则 $\frac{3}{2}a_2 = -a_1 + a_3$, 即 $\frac{3}{2}q = -1 + q^2$, 即 $2q^2 - 3q - 2 = 0$,

解得 $q = 2$ 或 $-\frac{1}{2}$ (舍去), 又 $a_1 = 1$, 所以 $S_4 = \frac{1 \times (1 - 2^4)}{1 - 2} = 15$.

故选: B

6. B

【分析】根据平行四边形的性质可得四边形 D_1C_1FM 为截面所在的四边形，即可利用线面

垂直得四边形 D_1C_1FM 为矩形，即可求解.

【详解】取 AA_1 的中点 M ，连接 D_1M, D_1F, C_1F ，

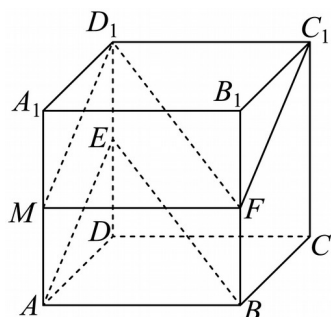
则 $MF \parallel AB \parallel C_1D_1$ ，故四边形 D_1C_1FM 为平行四边形，即为过点 F 且平行于平面 ABE 的截面，

$D_1M = \sqrt{5}$ ， $MF = 2$ ，且 $C_1D_1 \perp$ 平面 ADD_1C_1 ， $D_1M \subset$ 平面 ADD_1C_1 ，则 $C_1D_1 \perp D_1M$ ，

故四边形 D_1C_1FM 为矩形，

故四边形的面积为 $MF \cdot D_1M = 2\sqrt{5}$ ，

故选：B



7. A

【分析】由函数 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} - m$ 有零点，即 $m = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|}$ 有解，故实数 m 的取值范围就是

求 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|}$ 的值域.即可求得结果.

【详解】因为函数 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} - m$ 有零点，即 $m = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|}$ 有解，

故实数^m的取值范围就是求 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|}$ 的值域.

$$\because |x-1| \geq 0, \text{得} \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1, \text{且} \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} > 0,$$

故函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|}$ 的值域为 $(0,1]$, 则 m 的范围为 $(0,1]$,

故选: A

8. B

【分析】先分别求出集合 A, B , 再根据交集的定义即可得解.

$$\text{【详解】} A = \left\{ x \mid \frac{x+1}{x-3} < 0 \right\} = \{ x \mid (x+1)(x-3) < 0 \} = (-1, 3),$$

$$B = \{ x \mid \log_2 x \leq 2 \} = \{ x \mid \log_2 x \leq \log_2 4 \} = (0, 4], \text{则} A \cap B = (0, 3).$$

故选: B.

9. BD

【分析】利用不等式的性质来进行判断即可.

【详解】对于A, 取 $a=-3, b=-2, c=-6, d=-5$, 满足由 $a < b < 0, c < d < 0$, 但 $a+d=b+c$

不可以推出: $a+d < b+c$, 故A错误;

对于B, 由 $a < b < 0, c < d < 0$, 得 $-a > -b > 0, -c > -d > 0$,

再利用同向同正不等式可乘性得: $ac > bd$, 故B正确;

对于C, 因为 $a < b, c^2 > 0$, 根据不等式性质有: $ac^2 < bc^2$, 故C错误;

对于D, 因为 $c < d, a < 0$, 根据不等式性质有: $\frac{c}{a} > \frac{d}{a}$, 故D正确;

故选: BD.

10. BCD

【分析】根据偶函数的定义可判断 A，利用导数的几何意义可判断 B，利用函数的导数的正负可判断 C，利用函数单调性比较函数值的大小可判断 D.

【详解】函数 $f(x) = x \ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$ ，不关于原点对称， $f(x)$ 不是偶函数，

A 选项错误；

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}, \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - 1 = -\ln 2 - 1,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ 处切线的斜率为 $^{-1-\ln 2}$ ，B 选项正确；

$x \in (0, +\infty)$ 时， $\ln(1+x) > 0$ ， $\frac{x}{1+x} > 0$ ，所以 $f'(x) > 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，C 选项正确；

$\log_2 3 > 1 > 0$ ， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，则有 $f(\log_2 3) > f(1)$ ，得 $f(\log_2 3) - f(1) > 0$ ，D 选项正确.

故选：BCD.

11. BCD

【分析】根据斜率的乘积、双曲线、椭圆、三角形的面积等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】由题 $A(-2, 0), B(2, 0)$ ，设 $P(x, y)$ ，有 $k_{AP} = \frac{y}{x+2}, k_{BP} = \frac{y}{x-2}$ ，且 $x \neq \pm 2$.

对于 A， $k_{AP}k_{BP} = \frac{y^2}{x^2-4} = -1$ ，即 $x^2 + y^2 = 4 (x \neq \pm 2)$ ，A 错误；

对于 B 和 C， $k_{AP}k_{BP} = \frac{y^2}{x^2-4} = 1$ ，即 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq \pm 2)$ ，

所以离心率为 $\sqrt{2}$ ，渐近线方程为 $y = \pm x$ ，B 和 C 正确；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/568133116105007011>