第九章

几何学的变革

什么叫几何？

几何，就是研究空间构造及性质的一门学科。它是数学中最基本的研究内容之一，与分析、代数等等具有一样主要的地位，而且关系极为亲密。

几何学发展

- 几何学发展历史悠长，内容丰富。它和代数、分析、数论等等关系极其亲密。

- 几何思想是数学中最主要的一类思想。目前的数学各分支发展都有几何化趋向，即用几何观点及思想措施去探讨各数学理论。

9.4 射影几何的繁华

非欧几何揭示了空间的弯曲性质，将平直空间的欧氏几何变成了某种特例.

实际上，假如将欧几里得几何限制于其原先的涵义——三维、平直、刚性空间的几何学，那么19世纪的几何学就能够了解为一场广义的“非欧”运动：从三维到高维；从平直到弯曲；...而射影几何的发展，又从另一种方向使“神圣”的欧氏几何再度“降格”为其他几何的特例.

在19世纪此前，射影几何一直是在欧氏几何的框架下被研究的，其早期开拓者德沙格（法国）、帕斯卡（法国）等主要是以欧氏几何的措施处理问题，而且他们的工作因为18世纪解析几何与微积分发展的洪流而被人遗忘.

到18世纪末与19世纪初，蒙日（《画法几何学》）等人的工作，重新激发了人们对综合射影几何的爱好.

但是，将射影几何真正变革为具有自己独立的目的与措施的学科的数学家，是曾受教于蒙日的庞斯列(J-V.Poncelet，1788—1867).

庞斯列曾任拿破仑远征军的工兵中尉，1823年莫斯科战役法军溃败后被俘，度过了两年铁窗生活.

然而正是在这两年里，庞斯列不借助于任何课本，以炭代笔，在俄国萨拉托夫监狱的墙壁上谱写了射影几何的新篇章.

庞斯列获释后对自己在狱中的工作进行了修订、扩充，于1823年出版了《论图形的射影性质》，这部著作立即掀起了19世纪射影几何发展的巨大波澜，带来了这门学科历史上的黄金时期.

与德沙格和帕斯卡等不同，庞斯列并不限于考虑特殊问题.

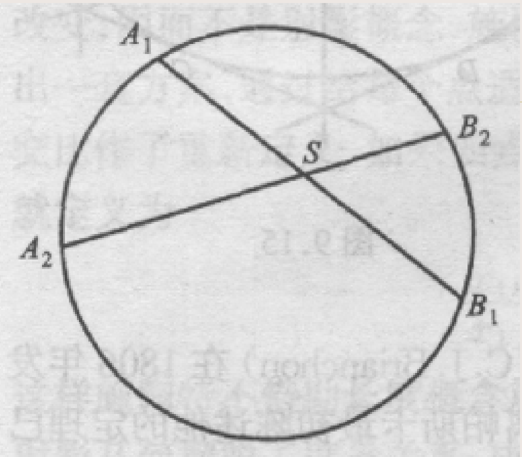
他探讨的是一般问题：图形在投射和截影下保持不变的性质，这也成为他后来，射影几何研究的主题.

因为距离和交角在投射和截影下会变化，庞斯列选择并发展了对合与调和点列的理论而不是以交比的概念为基础.

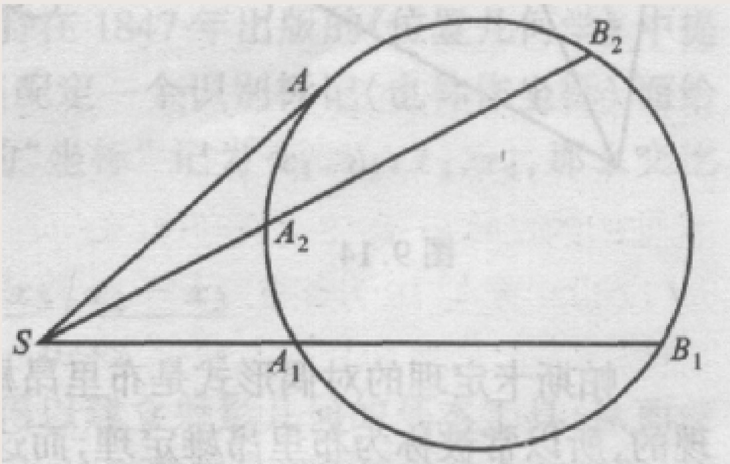
与他的老师蒙日也不同，庞斯列采用中心投影而不是平行投影，并将其提升为研究问题的一种措施.在庞斯列实现射影几何目的的一般研究中，有两个基本原理扮演了主要角色.

首先是连续性原理，它涉及经过投影或其他措施把某一图形变换成另一图形的过程中的几何不变性．用庞斯列本人的话说，就是：“假如一种图形从另一种图形经过连续的变化得出，而且后者与前者一样地—般，那么能够立即断定，第一种图形的任何性质第二个图形也有．”

作为这个原理的一种例子，庞斯列举了圆内相交弦的截段之积相等的定理，当交点位于圆的外部时，它就变成了割线的截段之积的相等关系.



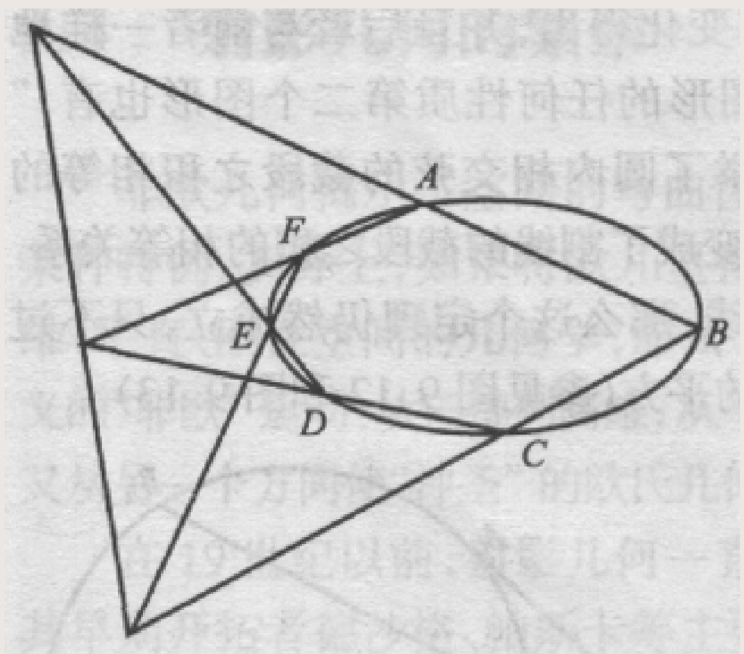
而假如其中的一条割线变成圆的切线，那么这个定理依然成立，只但是要把这条割线的截段之积换成切线的平方。



这个原理卡诺也曾用过，但庞斯列将它发展到涉及无穷远点的情形．所以，我们总能够说两条直线是相交的，交点或者是一种一般的点，或者是一种无穷远处的点(平行线的情形)．

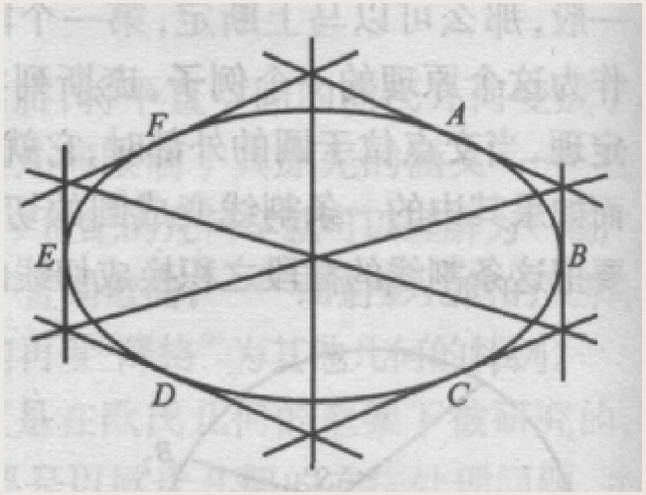
除了无穷远元素，庞斯列还利用连续性原理来引入虚元素．例如两个相交的圆，其公共弦当两圆逐渐分离并变得不再相交时，就成为虚的．无穷远元素与虚元素在庞斯列为到达射影几何的一般性工作中发挥了主要作用．

庞斯列强调的另一种原理是对偶原理．射影几何的研究者们曾经注意到，平面图形的“点”和“线”之间存在着异乎寻常的对称性，假如在它所涉及的定理中，将“点”换成“线”，同步将“线”换成“点”，那么就能够得到一种新的定理．例如考虑著名的帕斯卡定理：假如将一圆锥曲线的6个点看成是一种六边形的顶点，那么相正确边的交点共线 。



它的对偶形式则是：

假如将一圆锥曲线的6条切线看成是一种六边形的边，那么相正确顶点的连线共点。



帕斯卡定理的对偶形式是布里昂雄(C.J.Brianchon)在1823年发觉的，所以常被称为布里昂雄定理，而这离帕斯卡最初陈说他的定理已经有近二百年的光景.

虽然布里昂雄发觉了帕斯卡定理的对偶定理，但涉及他在内的许多数学家对于对偶原理为何行得通仍是不清楚，实际上，布里昂雄还曾怀疑过这个原理．

庞斯列射影几何工作中很主要的一部分，就是为建立对偶原理而发展了配极的一般理论．他进一步研究了圆锥曲线的极点与极线的概念，给出了从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述．

与庞斯列用综合的措施为射影几何奠基的同步，德国数学家默比乌斯，1790—1868)和普吕克(J.Plucker，1801—1868)开创了射影几何研究的解析(或代数)途径.

默比乌斯在《重心计算》(1827)一书中第一次引进了齐次坐标，这种坐标后被普吕克发展为更一般的形式，它相当于把笛卡儿坐标 x, y 换成

$$x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

齐次坐标成为代数地推导涉及对偶原理在内许多射影几何基本成果的有效工具．但这种代数的措施遭到了以庞斯列为首的综合派学者的反对，19世纪的射影几何就是在综合的与代数的这两大派之间的剧烈争论中迈进的.

支持庞斯列的数学家还有斯坦纳(J.Steiner)、沙勒(M.Chasles)和施陶特(K.G.C.von Staudt)等，其中施陶特的工作对于确立射影几何的特殊地位有决定性的意义.

到1850年前后，数学家们对于射影几何与欧氏几何在一般概念与措施上已作出了区别，但对这两种几何的逻辑关系仍不甚了了．虽然是综合派的著作中也依然在使用长度的概念，例如作为射影几何中心概念之一的交比，就一直是用长度来定义的，但长度在射影变换下会发生变化，因而不是射影概念．

施陶特在1847年出版的《位置几何学》中提出一套方案，经过给每个点合适配定一种辨认标识(也称作坐标)而给交比作了重新定义．假如四点的“坐标”记为x_1, x_2, x_3, x_4 ，那么交比就定义为

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} \Big/ \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}.$$

这么施陶特不借助长度概念就得以建立射影几何的基本工具，从而使射影几何摆脱了度量关系，成为与长度等度量概念无关的全新学科。

9.5 几何学的统一

在数学史上，罗巴切夫斯基被称为*“几何学上的哥白尼”*．这是因为非欧几何的创建不只是处理了两千年来一直悬而未决的平行公设问题，更主要的是它引起了有关几何观念和空间观念的最深刻的革命.

首先，非欧几何对于人们的空间观念产生了极其深远的影响.

在19世纪，占统治地位的是欧几里得的绝对空间观念．非欧几何的创始人无一例外地都对这种老式观念提出了挑战.

高斯早在1823年就在给朋友的一封信中写道

：

“我越来越深信我们不能证明我们的欧几里得几何具有物理的必然性，至少不能用人类的理智一一给出这种证明．或许在另一种世界中我们可能得以洞悉空间的性质，而目前这是不可能到达的．”

高斯曾一度把他的非欧几何称为“星空几何”，而从罗巴切夫斯基到黎曼，他们也都相信天文测量将能判断他们的新几何的真实性，以为欧氏公理可能只是物理空间的近似写照.

他们的预言，在20世纪被爱因斯坦的相对论所证明．正是黎曼几何为爱因斯坦的广义相对论提供了最恰当的数学表述，而根据广义相对论所进行的一系列天文观察、试验，也证明了宇宙流形的非欧几里得性.