

力学中的变换



武际可

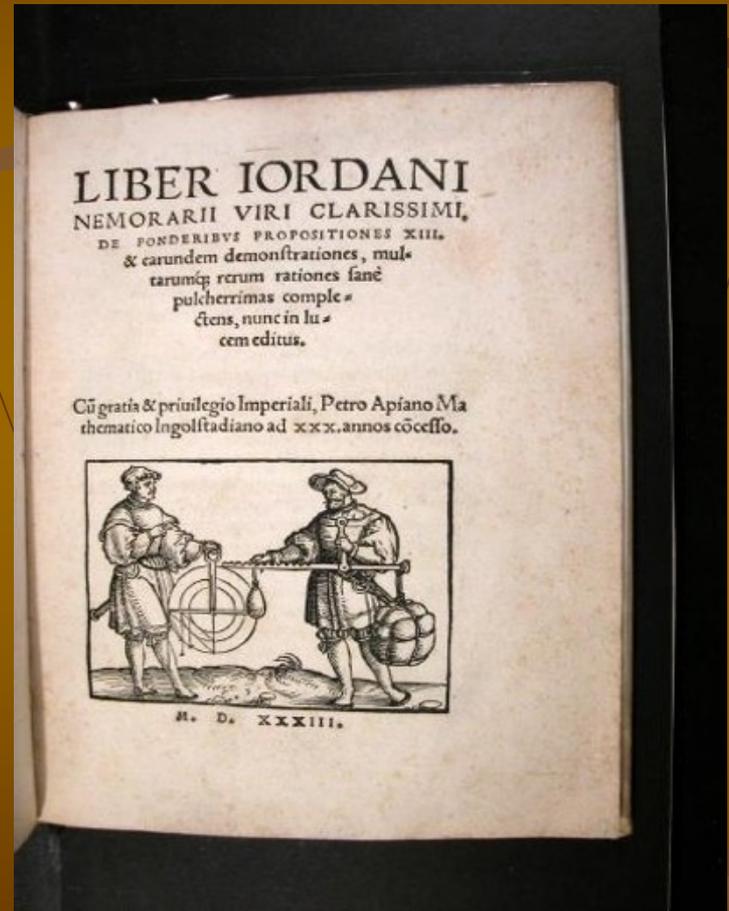
北京大学力学与工程科学系

引言

- 古希腊哲学家赫拉克利特（Heraclites, 约公元前540年~前480年）说：“人不能两次踏入同一条河”。极言万物无时无刻不在变化。研究事物的变化乃是科学的真谛。但是，为了区别事物、为了辨认变化的事物，我们必须抓住变化事物的不变性质。所以认识在变化过程中，事物的不变性质，乃是研究这种事物的关键。

引言

- 在力学中，最早朴素地认识不变性质的，大约是物体处于平衡时，进行微扰平衡不变化。13世纪约旦努在他的《重物的科学》中，就以这种观点来处理杠杆平衡问题。实际上，这就是后来发展的虚功原理的萌芽。



引言

- 力学是研究物质在空间中位置变化的科学，而几何学是专门研究空间构造的学科。所以力学和几何学有着天生不可分的联络。所以在1627年出版的我国最早的力学文件《远西奇器图说》中说“数学、度学，重学之必须，为弟兄内亲，不可相离者也。”这里重学就是力学，度学就是指几何学。

引言

- 所以力学同数学的发展是同步的，或者说，有什么样的数学就有什么样的力学，反过来在一定的数量程度上也能够说有什么样的力学就有事物什么样的数量。力学经常是要了解客观事物的质和量两个方面，而质和量是不可分的，所以力学同数学两个侧面，而质和量是不可分的，所以力学同数学自古便有紧密联络的老式。力学的任务是研究物质在空间中的运动，而几何是研究空间的，所以力学与几何有着最为亲密的联络。力学与物理学的革命性的发展经常是和几何联络在一起的。
- 从阿基米德到斯梯芬时代，力学的研究内容是静力学。在几何方面的主要工具是欧氏几何。相应的计算工具是常量的代数运算。

引言

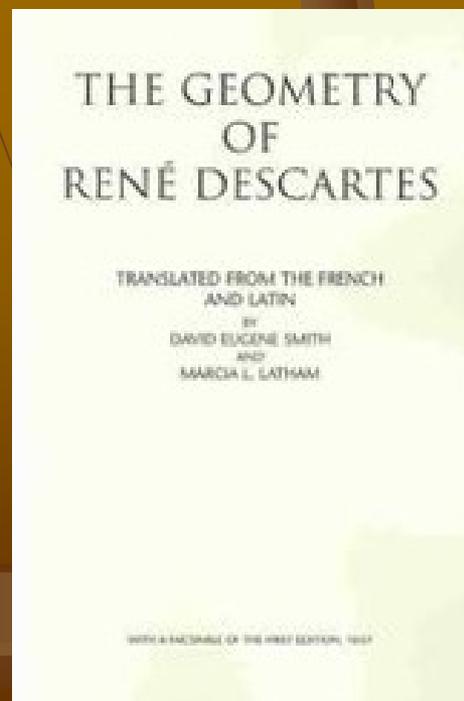
- 从伽利略、惠更斯到牛顿、莱布尼兹的时代，力学研究的主要内容是自由质点的运动，尤其是处理在引力作用下的自由质点的运动。在几何方面的主要工具是解析几何，尤其是有关圆锥曲线的解析几何。在计算方面的主要工具则是引进了变量，发明了微积分，而且微积分的发明人牛顿与莱布尼兹自己也是著名的力学家，是那个时期的力学学科的开拓者。
- 从拉格朗日到哈密尔顿和雅科比时代，力学主要的研究内容是约束运动。在几何方面的主要工具是引进了 n 维空间的概念，后来经过黎曼的严格化，就是流形或黎曼几何。而在分析方面的主要工具则是引进了泛函的概念，而且发展了求泛函极值的措施，也就是变分法，拉格朗日自己就是早期开拓变分法的主将。

引言

- 在20世纪末，力学又进入了一个重要的新阶段，这就是以庞卡莱与李亚普诺夫为代表的发展动力系统的定性理论时代。定性理论与运动稳定性的研究原来是从天体力学中提出来的一个理论课题，之后发觉在一切力学系统中，甚至在由一切非线性常微分方程决定的系统中都有普遍理论与应用意义。简朴说，定性理论是研究系统解的性质随参数而变化的方向，例如有无周期解的变化、有无极限环的变化、解稳定与不稳定的变化等等。相应的几何方面的

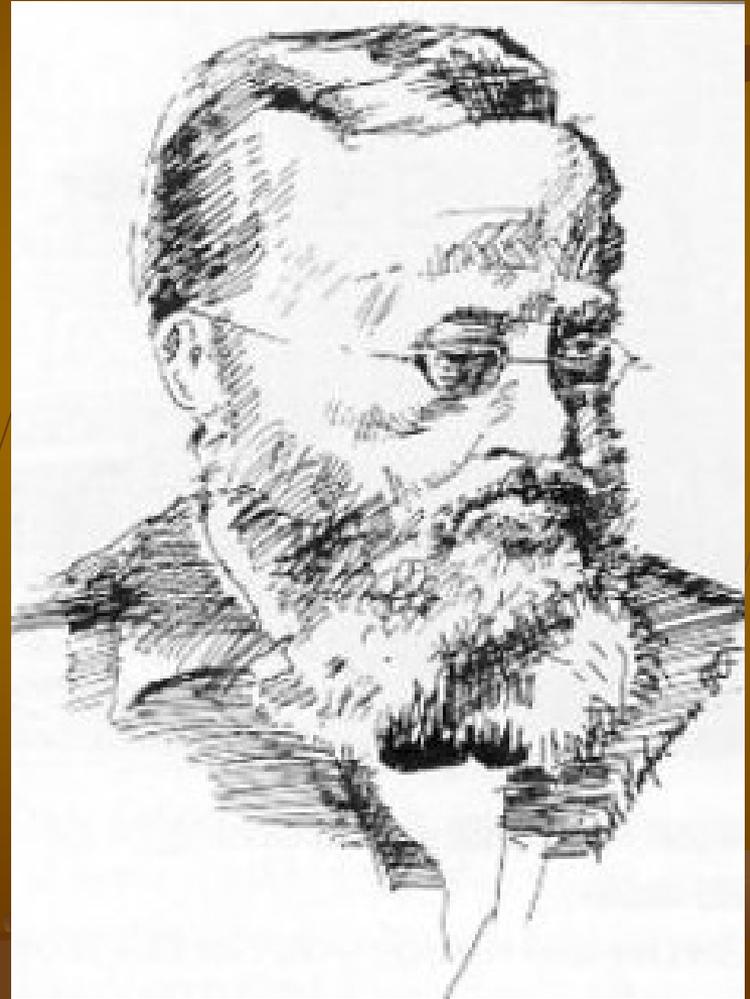
某些主要变换的历史

- 在全部的变化中，最为基本的变化就是位置的变化。为了描述位置的变化，从历史上说，首先就要把位置用数量来表述。这就是坐标的引进。
- 1637年笛卡尔（Rene Descartes，1596 - 1650)刊登《*La Géométrie*》奠定了解析几何的基础。从而产生了坐标变换的概念。



某些主要变换的历史

- 1893年李（*Marius Sophus Lie*，1842 - 1899）出版了他积九年研究的成果于三卷书《*Theorie der Transformationsgruppen*》中。奠定了李群也就是变换群的基础。



某些主要变换的历史



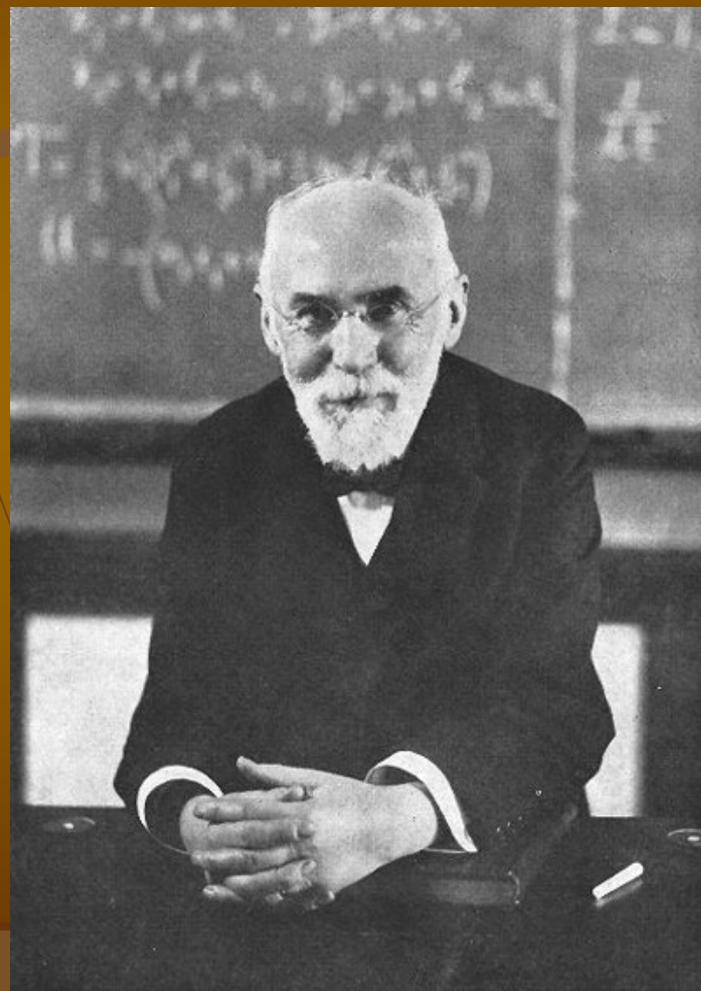
- 1872年，德国数学家克莱因（Felix Christian Klein, 1849-1925）
- 在论文《*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*》中提出以变换来区别非欧几何的理论。后来被称为**Erlangen program**爱尔朗根纲领。

某些主要变换的历史

- 在引进了坐标和时间的变换后，人们自然要讨论在这些变换下，哪些力学量保持不变。于是人们定义了下列三个力学量
- 即：动量 = $m\mathbf{v}$ 角动量 = $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ 和能量 = $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(r)$ 。人们立即发觉，这三个力学量分别在坐标的平移、旋转和时间的平移之下保持不变。这就是著名的力学中的三大守恒定律。

某些主要变换的历史

- 1923年罗伦茨（H.Lorentz, 1853-1928）引进了时间和空间变量的罗伦茨变换，在罗伦茨变换下，时空距离
- $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ 是不变量。其中c是光速。罗伦茨变换在后来相对论的发展中起了非常主要的作用。



某些主要变换的历史

- 在研究了许多种别的不变量之后，人们需要从一般的观点来讨论变换和不变量。
- 在力学问题被牛顿和拉普拉斯等人提为微分方程组之后，一种力学系统的变化能够用动力系统，

$\dot{x} = f(x)$, $x, f \in R^n$, 设给定初值为 x_0 , 它的解是

$$x = \varphi(x_0, t) \quad (1)$$

- 这个解实际上给出了从 x_0 到 x 的一种带参数 t 的变换。李是系统研究这种变换的第一人。这个变换构成了一种单参数变换群，也称为单参数李群。

某些主要变换的历史

- 设 $g(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的任一函数，一般来说假如

$$\sum_1^n f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

则 $g(\mathbf{x})$ 就是在变换 (1) 之下的一种不变量。显然这个条件是充分必要的，这是因为

$$\frac{dg}{dt} = \sum_1^n \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_1^n f_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

进一步讲，力学中的多种定律和多种方程，都是讲在一定条件或过程中的不变量。都能够统一纳入不变量的理论中去讨论。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/575114244324011330>