2023 届福建省福州市长乐区长乐高级中学高三综合题（二）数学试题（理工类）试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 f（x）=ax²+bx 是定义在[a–1，2a]上的偶函数，那么 a+b 的值是

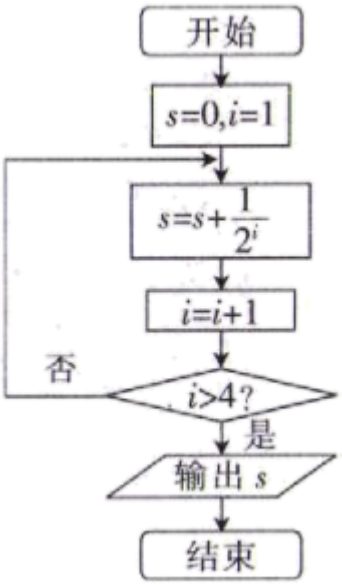
A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$

C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

2．已知数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，且$a_1>0$，若数列$\{a_n\}$是递增数列，则$a_1$的取值范围为（　　）

A．$(1,2)$　　B．$(0,3)$　　C．$(0,2)$　　D．$(0,1)$

3．执行如图所示的程序框图，输出的结果为（　　）



A．$\frac{7}{8}$　　B．$\frac{15}{8}$　　C．$\frac{31}{16}$　　D．$\frac{15}{16}$

4．“幻方”最早记载于我国公元前 500 年的春秋时期《大戴礼》中．“n 阶幻方$\left(n\geq 3,n\in \mathbf{N}^*\right)$”是由前 n^2 个正整数组成的—个 n 阶方阵，其各行各列及两条对角线所含的 n 个数之和（简称幻和）相等，例如“3 阶幻方”的幻和为 15（如图所示）．则“5 阶幻方”的幻和为（ ）

8	1	6
3	5	7
4	9	2

A．75 **B．65** **C．55** **D．45**

5．已知向量$\vec{a}=(3\sin x,-2)$，$\vec{b}=(1,\cos x)$，当$\vec{a}\perp\vec{b}$时，$\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A．$-\frac{12}{13}$ **B．**$\frac{12}{13}$ **C．**$-\frac{6}{13}$ **D．**$\frac{6}{13}$

6．复数$\frac{2}{1-i}$ **(i 为虚数单位)的共轭复数是**

A．1+i **B．1−i** **C．−1+i** **D．−1−i**

7．已知集合$A=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，则$A\cap B$的真子集个数为（　　）

A．1 个 **B．2 个** **C．3 个** **D．4 个**

8．设命题 p:$\exists n>1,n^2>2^n$,则¬p 为（　　）

A．$\forall n>1,n^2>2^n$ **B．**$\exists n\le 1,n^2\le 2^n$

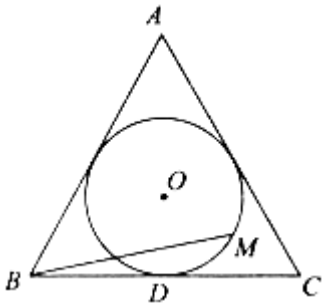
C．$\forall n>1,n^2\le 2^n$ **D．**$\exists n>1,n^2\le 2^n$

9．设一个正三棱柱$ABC-DEF$，每条棱长都相等，一只蚂蚁从上底面ABC的某顶点出发，每次只沿着棱爬行并爬到另一个顶点，算一次爬行，若它选择三个方向爬行的概率相等，若蚂蚁爬行 10 次，仍然在上底面的概率为P_{10}，则P_{10}为（　　）

A．$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$ **B．**$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}+\frac{1}{2}$

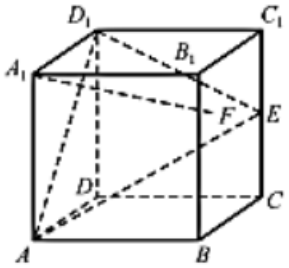
C．$\left(\frac{1}{3}\right)^{11}-\frac{1}{2}$ **D．**$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$

10．如图，圆O是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形ABC的内切圆，其与BC边相切于点D，点M为圆上任意一点，$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则$2x+y$的最大值为（　）



A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

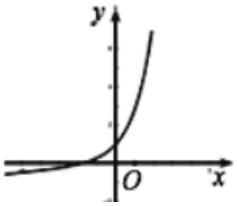
11．在正方体 AC_1 中，*E* 是棱 CC_1 的中点，*F* 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直，如图所示，下列说法不正确的是（　　）

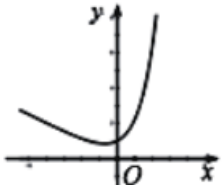


A．点 *F* 的轨迹是一条线段　　B．A_1F 与 *BE* 是异面直线

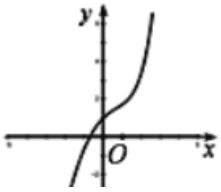
C．A_1F 与 D_1E 不可能平行　　D．三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值

12．函数 $f\left(x\right)=e^x+ax$（$a<0$）的图像可以是（　　）

A．

B．

C．

D．

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量 $a=(-2,1)$，$b=(1,m)$，若向量 $a+b$ 与向量 a 平行，则实数 $m=$_____.

14．一个长、宽、高分别为 1、2、2 的长方体可以在一个圆柱形容器内任意转动，则容器体积的最小值为_____.

15．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega\in N)$ 在 $[0,\pi]$ 上仅有 2 个零点，设 $g(x)=\sqrt{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$，则 $g\left(x\right)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的取值范围为_____.

16．若函数 $f(x)=a\ln x,(a\in R)$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x}$，在公共点处有共同的切线，则实数 a 的值为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)$ 和 $g\left(x\right)$ 的图象关于原点对称，且 $f\left(x\right)=x^2+2x$.

（1）解关于 x 的不等式 $g\left(x\right)\geq f\left(x\right)-\left|x-1\right|$；

（2）如果对 $\forall x\in R$，不等式 $g\left(x\right)+c\leq f\left(x\right)-\left|x-1\right|$ 恒成立，求实数 c 的取值范围.

18．（12 分）已知在 ΔABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，$c=4\sqrt{2}$，$\cos C=\frac{3}{5}$.

（1）若 $B=\frac{\pi}{4}$，求 a 的值；

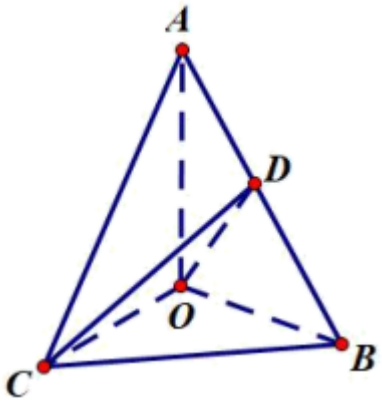
（2）若 $b=5$，求 ΔABC 的面积.

19．（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=e^{ax}-x$（$a\in R$，e 为自然对数的底数），$g\left(x\right)=\ln x+mx+1$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，$x\left[f\left(x\right)+x\right]\geq g\left(x\right)$ 对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

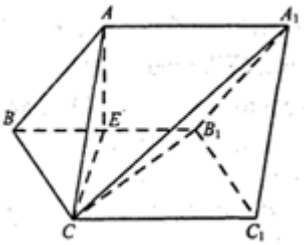
20．（12 分）如图，在 $\vee AOB$ 中，已知 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAO=\frac{\pi}{6}$，$AB=4$，D 为线段 AB 的中点，$\triangle AOC$ 是由 $\vee AOB$ 绕直线 AO 旋转而成，记二面角 $B-AO-C$ 的大小为 θ.



（1）当平面 $COD\perp$ 平面 AOB 时，求 θ 的值；

（2）当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，求二面角 $B-OD-C$ 的余弦值.

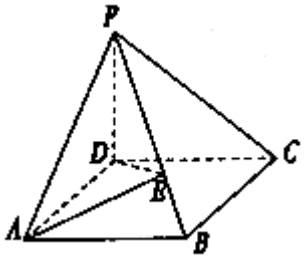
21．（12 分）如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 是菱形，AC=BC=2，$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$，点 A 在平面 BCC_1B_1 上的投影为棱 BB_1 的中点 E.



（1）求证：四边形 ACC_1A_1 为矩形；

（2）求二面角 $E\text{-}B_1C\text{-}A_1$ 的平面角的余弦值．

22．（10 分）如图在棱锥 $P-ABCD$ 中，$ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 面 $ABCD$，$PB=2,\angle BPC=45^{\circ},\angle PBD=30^{\circ}.$



（1）在 PB 上是否存在一点 E，使 $PC\perp$ 面 ADE，若存在确定 E 点位置，若不存在，请说明理由；

（2）当 E 为 PB 中点时，求二面角 $P-AE-D$ 的余弦值．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

依照偶函数的定义，对定义域内的任意实数，f（﹣ x）=f（x），且定义域关于原点对称，a﹣ 1=﹣ 2a，即可得解.

【详解】

根据偶函数的定义域关于原点对称，且 f（x）是定义在[a–1，2a]上的偶函数，

得 a–1=–2a，解得 a=$\frac{1}{3}$，又 f（–x）=f（x），

∴b=0，∴a+b=$\frac{1}{3}$．故选 B.

【点睛】

本题考查偶函数的定义，对定义域内的任意实数，f（﹣ x）=f（x）；奇函数和偶函数的定义域必然关于原点对称，定义域区间两个端点互为相反数.

2、D

【解析】

先根据已知条件求解出$\{a_n\}$的通项公式，然后根据$\{a_n\}$的单调性以及$a_1>0$得到a_1满足的不等关系，由此求解出a_1的取值范围.

【详解】

由已知得$\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，则$a_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}$.

因为$a_1>0$，数列$\{a_n\}$是单调递增数列，

所以$a_{n+1}>a_n>0$，则$\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+1}>\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+1}$，

化简得$0<\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\frac{1}{3}<\frac{1}{a_1}-1$，所以$0<a_1<1$.

故选：D.

【点睛】

本题考查数列通项公式求解以及根据数列单调性求解参数范围，难度一般.已知数列单调性，可根据a_n,a_{n+1}之间的大小关系分析问题.

3、D

【解析】

由程序框图确定程序功能后可得出结论.

【详解】

执行该程序可得$S=0+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$.

故选：D.

【点睛】

本题考查程序框图．解题可模拟程序运行，观察变量值的变化，然后可得结论，也可以由程序框图确定程序功能，然后求解.

4、B

【解析】

计算$1+2+\cdots+25$的和，然后除以5，得到“5 阶幻方”的幻和.

【详解】

依题意“5 阶幻方”的幻和为$\dfrac{1+2+\cdots+25}{5}=\dfrac{\dfrac{1+25}{2}\times 25}{5}=65$，故选 B.

【点睛】

本小题主要考查合情推理与演绎推理，考查等差数列前n项和公式，属于基础题.

5、A

【解析】

根据向量的坐标运算，求出$\tan x$，$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2\tan x}{\tan^2 x+1}$，即可求解.

【详解】

$\because \vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\sin x-2\cos x=0,\therefore \tan x=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x=-\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x}$

$=-\dfrac{2\tan x}{\tan^2 x+1}=-\dfrac{12}{13}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查向量的坐标运算、诱导公式、二倍角公式、同角间的三角函数关系，属于中档题.

6、B

【解析】

分析：化简已知复数 z，由共轭复数的定义可得.

详解：化简可得 z=$\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$

∴z 的共轭复数为 1− i.

故选 B.

点睛：本题考查复数的代数形式的运算，涉及共轭复数，属基础题.

7、C

【解析】

求出$A\cap B$的元素，再确定其真子集个数.

【详解】

由$\begin{cases}y=x^2\\x^2+y^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$，$\therefore A\cap B$中有两个元素，因此它的真子集有3个.

故选：C.

【点睛】

本题考查集合的子集个数问题，解题时可先确定交集中集合的元素个数，解题关键是对集合元素的认识，本题中集合A,B都是曲线上的点集.

8、C

【解析】

根据命题的否定，可以写出$\neg p$：$\forall n>1,n^2\le 2^n$，所以选C.

9、D

【解析】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\frac{2}{3}P_{n-1}$；②若上一步在下面，则第$n-1$步不在上面的概率是$1-P_{n-1}$.如果爬上来，其概率是$\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，两种事件又是互斥的,可得$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，根据求数列的通项知识可得选项.

【详解】

由题意，设第n次爬行后仍然在上底面的概率为P_n.

①若上一步在上面，再走一步要想不掉下去，只有两条路，其概率为$\frac{2}{3}P_{n-1}\left(n\ge 2\right)$；

②若上一步在下面，则第$n-1$步不在上面的概率是$1-P_{n-1},\left(n\ge 2\right)$.如果爬上来，其概率是$\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right),\left(n\ge 2\right)$，

两种事件又是互斥的,$\therefore P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}\left(1-P_{n-1}\right)$，即$P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}$，$\therefore P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore$数列$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，而$P_1=\frac{2}{3}$，所以$P_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$，

$\therefore$当$n=10$时，$P_{10}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}+\frac{1}{2}$，

故选：D.

【点睛】

本题考查几何体中的概率问题，关键在于运用递推的知识，得出相邻的项的关系，这是常用的方法，属于难度题.

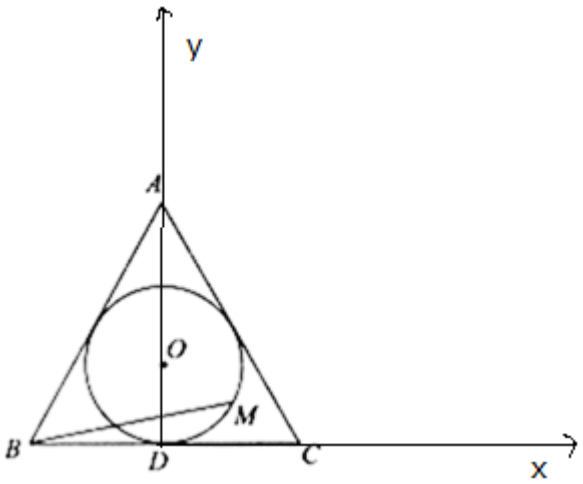
10、C

【解析】

建立坐标系，写出相应的点坐标，得到 $2x+y$ 的表达式，进而得到最大值.

【详解】

以 D 点为原点，BC 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，建立坐标系，



设内切圆的半径为 1，以（0，1）为圆心，1 为半径的圆；

根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2}\times l_{周长}\times r=S=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin 60^0$，

可得到内切圆的半径为 $1;$

可得到点的坐标为：$B\left(-\sqrt{3},0\right),C\left(\sqrt{3},0\right),A\left(0,3\right),D\left(0,0\right),M\left(\cos\theta,1+\sin\theta\right)$

$\overrightarrow{BM}=\left(\cos\theta+\sqrt{3},1+\sin\theta\right),\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{3},3\right),\overrightarrow{BD}=\left(\sqrt{3},0\right)$

故得到 $\overrightarrow{BM}=\left(\cos\theta+\sqrt{3},1+\sin\theta\right)=\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y,3x\right)$

故得到 $\cos\theta=\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3},\sin\theta=3x-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+\sin\theta}{3}\\ y=\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sin\theta}{3}+\dfrac{2}{3}\end{cases},\quad 2x+y=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\sin\theta}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin\left(\theta+\varphi\right)+\frac{4}{3}\le 2.$$

故最大值为：2.

故答案为 C.

【点睛】

这个题目考查了向量标化的应用，以及参数方程的应用，以向量为载体求相关变量的取值范围，是向量与函数、不等式、三角函数等相结合的一类综合问题.通过向量的运算，将问题转化为解不等式或求函数值域，是解决这类问题的一般方法.

11、C

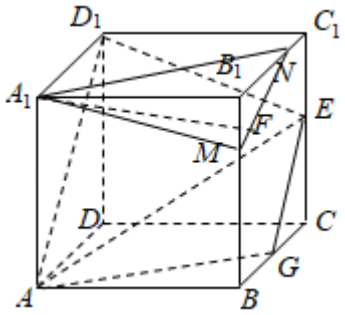
【解析】

分别根据线面平行的性质定理以及异面直线的定义，体积公式分别进行判断.

【详解】

对于 A，设平面 AD_1E 与直线 BC 交于点 G，连接 AG、EG，则 G 为 BC 的中点

分别取 B_1B、B_1C_1 的中点 M、N，连接 AM、MN、AN，



Q $A_1M//D_1E$，$A_1M\not\subset$ 平面 D_1AE，$D_1E\subset$ 平面 D_1AE，

$\therefore A_1M//$ 平面 D_1AE．同理可得 $MN//$ 平面 D_1AE，

Q A_1M、MN 是平面 A_1MN 内的相交直线

$\therefore$ 平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，由此结合 $A_1F//$ 平面 D_1AE，可得直线 $A_1F\subset$ 平面 A_1MN，

即点 F 是线段 MN 上上的动点．$\therefore A$ 正确.

对于 B，Q 平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，BE 和平面 D_1AE 相交，

$\therefore A_1F$ 与 BE 是异面直线，$\therefore B$ 正确.

对于 C，由 A 知，平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，

$\therefore A_1F$ 与 D_1E 不可能平行，$\therefore C$ 错误.

对于 D，因为 $MN//EG$，则 F 到平面 AD_1E 的距离是定值，三棱锥 $F-AD_1E$ 的体积为定值，所以 D 正确；

故选：C.

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/575130002343011133