育人 · 寻梦

领军精英课程

八 年 级 数 学

专题十二　勾股定理及其逆定理

主备人：章云（湖州市浔溪中学）

授课人：黄荣（湖州市练市镇第一中学）

内 容 提 要

- 勾股定理
  - 定理内容
    - 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方
    - 如果设直角三角形两条直角边长度为a, b，斜边的长度为c，那么$a^2+b^2=c^2$
  - 逆定理
    - 判断直角三角形：如果三角形三边长为a，b，c，且$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是直角三角形
    - 勾股数
  - 应用
    - 求解三角形
    - 计算最值

数形结合思想
转化思想
分类讨论思想

课 前 练 习

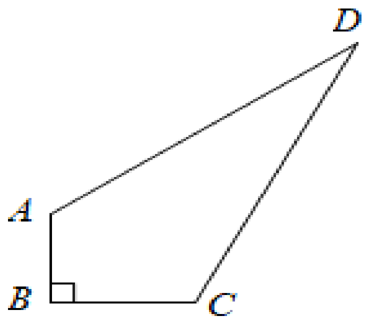
1. 在△ABC中，∠A、∠B、∠C的对边分别为a、b、c，下列条件中，能判断△ABC是直角三角形的是（ D ）

A．$a=32$，$b=42$，$c=52$　　B．$a=b$，$\angle C=45°$

C．$\angle A$：$\angle B$：$\angle C=6$：8：10　　D．$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}$，$c=2$

2. 如图1，在一块四边形$ABCD$空地种植草皮，测得AB=3m，BC=4m，DA=13m，CD=12m, 且∠ABC=90°，若每平方米草皮需要200元，则需要投资（ B ）

A．16800元　　B．7200元　　C．5100元　　D．无法确定

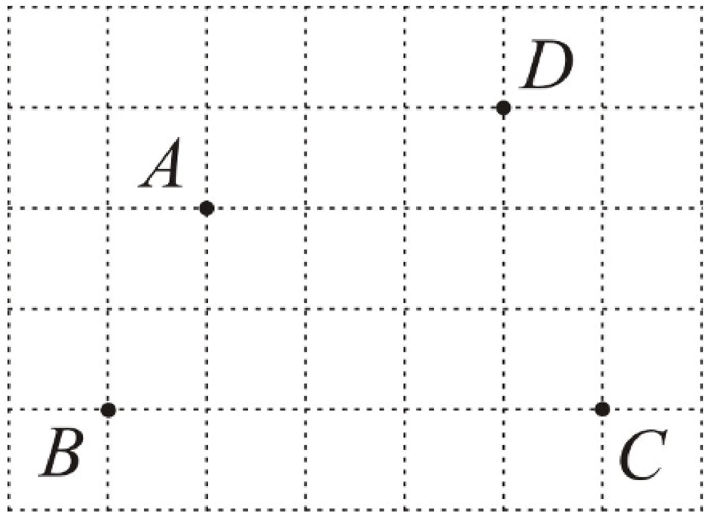


（图1）

课 前 练 习

3. 如图2是由单位长度均为1的小正方形组成的网格，*A*，*B*，*C*，*D*都是网格线的交点，由其中任意三个点连接而成的三角形是直角三角形的个数为（ B ）

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个



（图2）

例 题 精 析

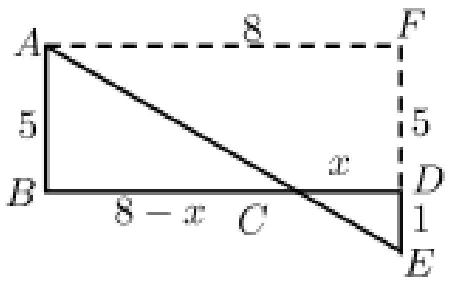
【勾股定理与最值】

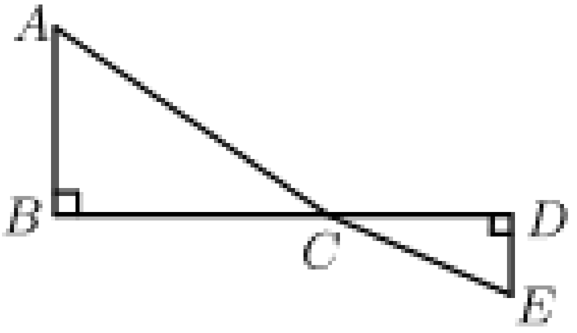
例1．如图3，C为线段BD上一动点，分别过点B，D作$AB\perp BD$，$ED\perp BD$，连结AC，EC．已知$AB=3$，$DE=2$，$BD=12$，设$CD=x$．

（1）用含x的代数式表示$AC+CE$的长．Rt△ABC和Rt△CDE中,利用勾股定理

（2）请问点C满足什么条件时，$AC+CE$的值最小，A、C、E三点共线 并求出此时$AC+CE$的最小值．

（3）根据（2）中的规律和结论，重新构图求出代数式$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(8-x)^2+25}$的最小值．





（图3）

例 题 精 析

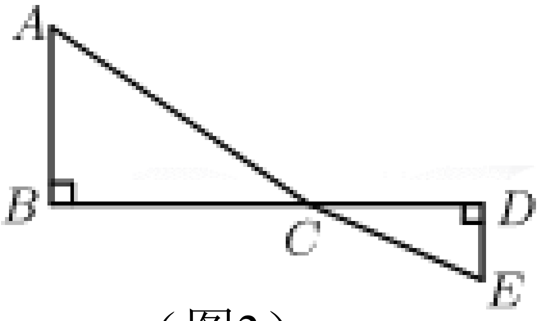
【勾股定理与最值】

例1．如图3，*C*为线段*BD*上一动点，分别过点*B*，*D*作*AB*⊥*BD*，*ED*⊥*BD*，连结*AC*，*EC*．已知*AB*=3，*DE*=2，*BD*=12，设*CD*=x．

（1）用含*x*的代数式表示*AC*+*CE*的长．

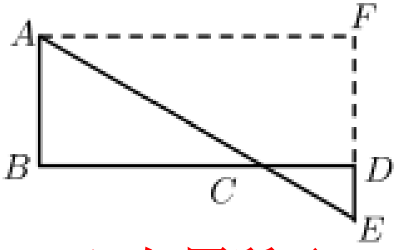
（2）请问点*C*满足什么条件时，*AC*+*CE*的值最小，并求出此时*AC*+*CE*的最小值．

（3）根据（2）中的规律和结论，重新构图求出代数式 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(8-x)^2+25}$ 的最小值．



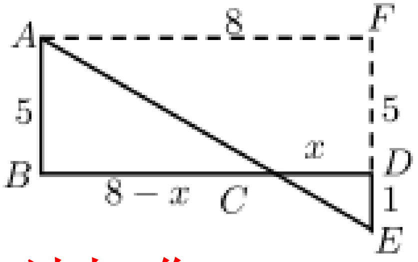
（图3）

（1）解：在Rt△*ABC*中，$AC+CE=\sqrt{AB^2+BC^2}+\sqrt{CD^2+DE^2}=\sqrt{(12-x)^2+9}+\sqrt{x^2+4}$



（2）如图所示，*C*是*AE*和*BD*交点时，*AC*+*CE*的值最小，过点*B*作 *AB*⊥*BD*，过点*D*作*ED*⊥*BD*

在Rt△*AEF*中，$AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$



（3）如图所示，过点*B*作 *AB*⊥*BD*，过点*D*作*ED*⊥*BD*,使 *AB*=5，*ED*=1，*DB*=8，连结*AE*交*BD*于点*C*，*AE*的长即为所求代数式的最小值．

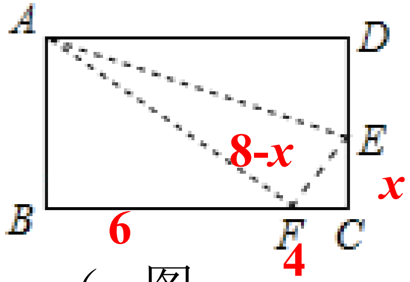
习 题 演 练

【勾股定理与最值】

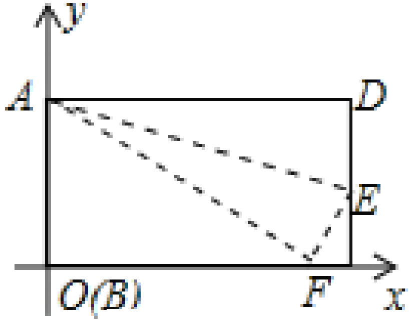
练习1. 如图4，长方形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=10$，在边CD上取一点E，将$\triangle ADE$折叠后点D恰好落在BC边上的点F.

（1）求CE的长；

（2）建立平面直角坐标系如图5所示，在x轴上找一点P，使$PA+PE$的值最小，求出最小值和点P的坐标；



（图4）



（图5）

作点E关于x轴的对称点Q，连结AQ，与x轴的交点即为所求

在$Rt\triangle CEF$中，由$CE^2+CF^2=EF^2$即可求解

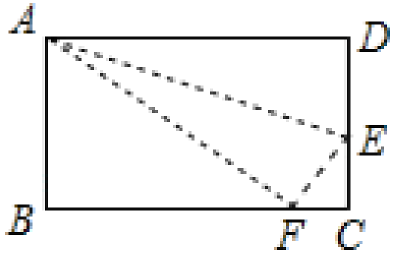
习 题 演 练

【勾股定理与最值】

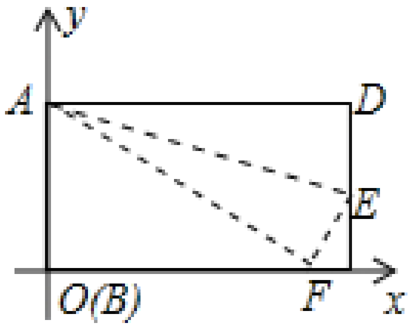
练习1. 如图4，长方形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=10$，在边CD上取一点E，将△ADE折叠后点D恰好落在BC边上的点F.

（1）求CE的长；

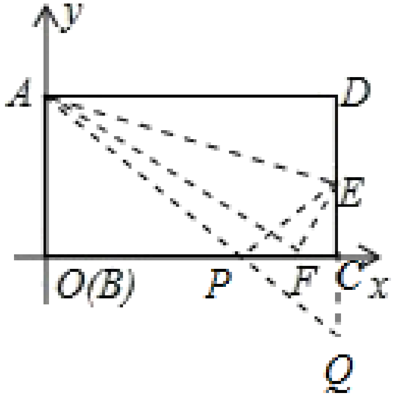
（2）建立平面直角坐标系如图5所示，在x轴上找一点P，使$PA+PE$的值最小，求出最小值和点P的坐标；



（图4）



（图5）



解（1）设$CE=x$，则$DE=EF=8-x$，∵$AD=AF=10$，$AB=8$，∴$BF=6$，∴$CF=4$，在Rt△CEF中，由$CE^2+CF^2=EF^2$，

得$x^2+4^2=(8-x)^2$，

解得$x=3$，即$CE=3$.

（2）如图，作点E关于x轴的对称点Q，连结AQ，与x轴的交点即为所求.

则$CE=CQ=3$，∴点Q（10，－3），

∴$DQ=CD+CQ=11$，

∴$AQ=\sqrt{221}$

由A（0，8），Q（10，－3）可得直线AQ解析式为$y=\frac{11}{10}x+8$

∴点P（$\frac{80}{11}$，0）

例 题 精 析

【勾股数与探索规律】

例2. 勾股定理是一个基本的几何定理，早在我国西汉时期算书《周髀算经》就有“勾三股四弦五”的记载．如果一个直角三角形三边长都是正整数，这样的直角三角形叫“整数直角三角形”，这三个整数叫做一组“勾股数”．如3，4，5；5，12，13；7，24，25；8，15，17；9，40，41等等都是勾股数．

（1）如果a，b，c是一组勾股数，即满足$a^2+b^2=c^2$，则ka，kb，kc（k为正整数）也是一组勾股数．如:3，4，5是一组勾股数，则＿6,8,10＿也是一组勾股数；

（2）另外利用一些构成勾股数的公式也可以写出许多勾股数，毕达哥拉斯学派就曾提出$a=2n+1$，$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$（n为正整数）是一组勾股数，证明满足以上公式的a，b，c是一组勾股数；

∵（$2n+1$）^{2}+（$2n^2+2n$）^{2}=$4n^2+4n+1+4n^4+8n^3+4n^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$,

∵（$2n^2+2n+1$）$^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$,

∴（$2n+1$）^{2}+（$2n^2+2n$）^{2}=（$2n^2+2n+1$）^{2}

∴满足以上公式的a，b，c是一组勾股数.

例 题 精 析

【勾股数与探索规律】

例2.（3）值得自豪的是，世界上第一次给出的勾股数公式，收集在我国的《九章算术》中，书中提到：当 $\boxed{a=\frac{1}{2}(m^2-n^2),\ b=mn, c=\frac{1}{2}(m^2+n^2)}$（$m,n$为正整数，$m>n$）时，$a$，$b$，$c$构成一组勾股数；请根据这一结论直接写出一组符合条件的勾股数____$a=6,b=8,c=10$____.