

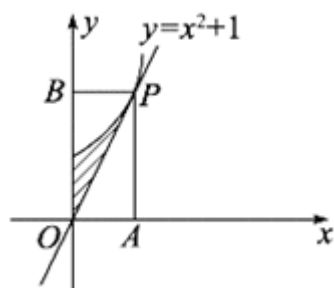
西藏拉萨那曲第二高级中学 2024 年高三下学期一练前第二次强化训练数学试题

注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如图在直角坐标系 xOy 中，过原点 O 作曲线 $y = x^2 + 1 (x \geq 0)$ 的切线，切点为 P ，过点 P 分别作 x 、 y 轴的垂线，垂足分别为 A 、 B ，在矩形 $OAPB$ 中随机选取一点，则它在阴影部分的概率为 ()



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-2x^2 + x + 3}\}$ ， $B = \{x | \log_2 x > 1\}$ 则全集 $U = \mathbf{R}$ 则下列结论正确的是 ()

- A. $A \cap B = A$ B. $A \cup B = B$ C. $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$ D. $B \subseteq \complement_U A$

3. 阿波罗尼斯（约公元前 262~190 年）证明过这样的命题：平面内到两定点距离之比为常数 $k (k > 0, k \neq 1)$ 的点的轨迹是圆.后人将这个圆称为阿氏圆.若平面内两定点 A ， B 间的距离为 2，动点 P 与 A ， B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当 P ， A ， B 不共线时， $\triangle PAB$ 的面积的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4. 已知 F_1 、 F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点，过点 F_2 与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线另一条渐近线于点 M ，若点 M 在以线段 F_1F_2 为直径的圆外，则双曲线离心率的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(\sqrt{3}, 2)$ C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ D. $(1, \sqrt{2})$

5. 设 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 是非零向量.若 $\left| \vec{a} \cdot \vec{c} \right| = \left| \vec{b} \cdot \vec{c} \right| = \frac{1}{2} \left| (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \right|$ ，则 ()

A. $\frac{r}{a} \cdot (\frac{1}{b} + \frac{r}{c}) = 0$ B. $\frac{r}{a} \cdot (\frac{1}{b} - \frac{r}{c}) = 0$ C. $(\frac{r}{a} + \frac{1}{b}) \cdot \frac{r}{c} = 0$ D. $(\frac{r}{a} - \frac{1}{b}) \cdot \frac{r}{c} = 0$

6. 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}-1}$, $g(x) = \ln \frac{x}{2} + 1$, 若 $f(m) = g(n)$ 成立, 则 $n-m$ 的最小值为 ()

A. 0 B. 4 C. $3e - \frac{1}{2}$ D. $\frac{5+\ln 6}{2}$

7. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A , 与准线在第三象限交于点 B , 过点 A 作

准线的垂线, 垂足为 H . 若 $\tan \angle AFH = 2$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$ ()

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

8. 将函数 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 给出下列关于 $g(x)$ 的结论:

- ①它的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{9}$ 对称;
- ②它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$;
- ③它的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称;
- ④它在 $[\frac{5\pi}{3}, \frac{19\pi}{9}]$ 上单调递增.

其中所有正确结论的编号是 ()

A. ①② B. ②③ C. ①②④ D. ②③④

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a$ ($a \neq 0$), 且 $a_{n+1} = ka_n + t$, 其中 $k, t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 下列叙述正确的是 ()

- A. 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则一定有 $k = 1$ B. 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则一定有 $t = 0$
- C. 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 则一定有 $k \neq 1$ D. 若 $\{a_n\}$ 不是等比数列, 则一定有 $t \neq 0$

10. 为了进一步提升驾驶人交通安全文明意识, 驾考新规要求驾校学员必须到街道路口执勤站岗, 协助交警劝导交通. 现有甲、乙等 5 名驾校学员按要求分配到三个不同的路口站岗, 每个路口至少一人, 且甲、乙在同一路口的分配方案共有 ()

A. 12 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种

11. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 其中点 A 在第一象限, 若弦 AB 的长为 $\frac{25}{4}$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} =$ ()

A. 2 或 $\frac{1}{2}$ B. 3 或 $\frac{1}{3}$ C. 4 或 $\frac{1}{4}$ D. 5 或 $\frac{1}{5}$

12. 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 如果 $g(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上单调递减, 那么实数 a 的最大值为 ()

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{3}{4}\pi$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$, $P(X < 6) = 0.78$, 则 $P(X \leq 2) =$ _____.

14. 已知角 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 的终边过点 $P(-1, -2\sqrt{2})$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

15. 在直角坐标系中, 某等腰直角三角形的两个顶点坐标分别为 $(1, 1), (2, 2)$, 函数

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(A > 0, 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象经过该三角形的三个顶点, 则 $f(x)$ 的解析式为

$f(x) =$ _____.

16. 正四面体 $ABCD$ 的一个顶点 A 是圆柱 OA 上底面的圆心, 另外三个顶点 BCD 圆柱下底面的圆周上, 记正四面体

$ABCD$ 的体积为 V_1 , 圆柱 OA 的体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$;

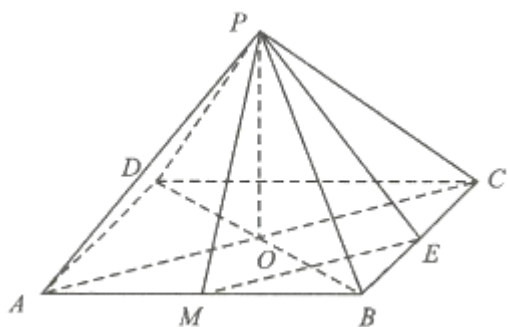
(2) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, 求 $ab + b$ 的最大值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $(a - \sqrt{3}b) \sin A + b \sin B = c \sin C$.

(1) 求角 C 的值;

(2) 若 $\sin A \sin B = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$, $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

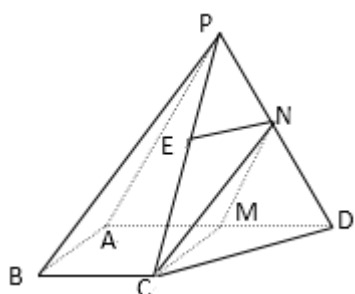
19. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, O 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的中心, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BC 的中点.



(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(II) 若 $PE = 3$, 求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.

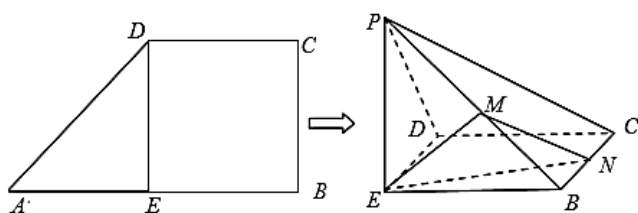
20. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形, 且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = 1$, $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, M, N 分别是 AD, PD 的中点.



(1) 证明: 平面 $CMN \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 已知点 E 在棱 PC 上且 $CE = \frac{2}{3}CP$, 求直线 NE 与平面 PAB 所成角的余弦值.

21. (12 分) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2DC = 2BC$, E 为 AB 的中点, 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起, 使得点 A 到点 P 位置, 且 $PE \perp EB$, M 为 PB 的中点, N 是 BC 上的动点 (与点 B, C 不重合).



(I) 证明: 平面 $EMN \perp$ 平面 PBC 垂直;

(II) 是否存在点 N , 使得二面角 $B-EN-M$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$? 若存在, 确定 N 点位置; 若不存在, 说明理由.

22. (10 分) 已知函数 $g(x) = \ln x - mx - 1$.

(1) 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x) = xg(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 证明 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

设所求切线的方程为 $y = kx$ ，联立 $\begin{cases} y = kx (k > 0) \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$ ，消去 y 得出关于 x 的方程，可得出 $\Delta = 0$ ，求出 k 的值，进而求得

切点 P 的坐标，利用定积分求出阴影部分区域的面积，然后利用几何概型概率公式可求得所求事件的概率。

【详解】

设所求切线的方程为 $y = kx$ ，则 $k > 0$ ，

联立 $\begin{cases} y = kx (k > 0) \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$ ，消去 y 得 $x^2 - kx + 1 = 0$ ①，由 $\Delta = k^2 - 4 = 0$ ，解得 $k = 2$ ，

方程①为 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，解得 $x = 1$ ，则点 $P(1, 2)$ ，

所以，阴影部分区域的面积为 $S = \int_0^1 (x^2 + 1 - 2x) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ ，

矩形 $OAPB$ 的面积为 $S' = 1 \times 2 = 2$ ，因此，所求概率为 $P = \frac{S}{S'} = \frac{1}{6}$ 。

故选：A.

【点睛】

本题考查定积分的计算以及几何概型，同时也涉及了二次函数的切线方程的求解，考查计算能力，属于中等题。

2、D

【解析】

化简集合 A ，根据对数函数的性质，化简集合 B ，按照集合交集、并集、补集定义，逐项判断，即可求出结论。

【详解】

由 $-2x^2 + x + 3 \geq 0, (2x - 3)(x + 1) \leq 0$ ，

则 $A = \left[-1, \frac{3}{2} \right]$ ，故 $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$ ，

由 $\log_2 x > 1$ 知, $B = (2, +\infty)$, 因此 $A \cap B = \emptyset$,

$$A \cup B = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \cup (2, +\infty), \quad (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = (2, +\infty),$$

$$(2, +\infty) \subseteq (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right),$$

故选:D

【点睛】

本题考查集合运算以及集合间的关系, 求解不等式是解题的关键, 属于基础题.

3、A

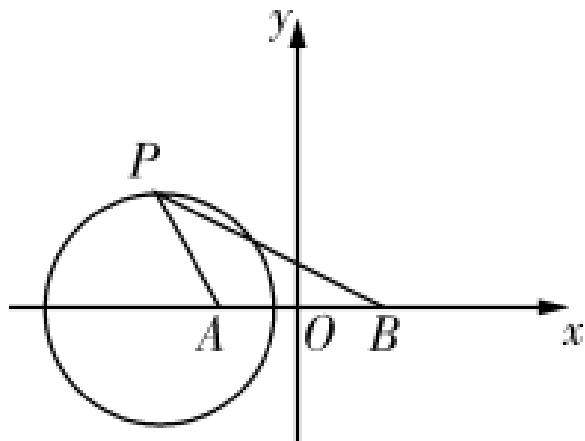
【解析】

根据平面内两定点 A , B 间的距离为 2, 动点 P 与 A , B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 利用直接法求得轨迹, 然后利用数形结合求解.

合求解.

【详解】

如图所示:



设 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(x, y)$, 则 $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

化简得 $(x+3)^2 + y^2 = 8$,

当点 P 到 AB (x 轴) 距离最大时, $\triangle PAB$ 的面积最大,

$\therefore \triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查轨迹的求法和圆的应用，还考查了数形结合思想和运算求解的能力，属于中档题.

4、A

【解析】

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

不妨设过点 F_1 与双曲线的一条渐近线平行的直线方程为 $y = \frac{b}{a}(x - c)$,

与 $y = -\frac{b}{a}x$ 联立, 可得交点 $M(\frac{c}{2}, -\frac{bc}{2a})$,

$\because$ 点 M 在以线段 F_1F_2 为直径的圆外,

$\therefore |OM| > |OF_1|$, 即有 $\frac{c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4a^2} > c^2$,

$\therefore \frac{b^2}{a^2} > 3$, 即 $b^2 > 3a^2$,

$\therefore c^2 - a^2 > 3a^2$, 即 $c > 2a$.

则 $e = \frac{c}{a} > 2$.

$\therefore$ 双曲线离心率的取值范围是 $(2, +\infty)$.

故选: A.

点睛: 解决椭圆和双曲线的离心率的求值及范围问题其关键就是确立一个关于 a, b, c 的方程或不等式, 再根据 a, b, c 的关系消掉 b 得到 a, c 的关系式, 建立关于 a, b, c 的方程或不等式, 要充分利用椭圆和双曲线的几何性质、点的坐标的范围等.

5、D

【解析】

试题分析: 由题意得: 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 则 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$; 若 $\vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{c}$, 则由 $|\vec{a} \cdot \vec{c}| = |\vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{2} |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ 可知,

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, 故 $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ 也成立, 故选 D.

考点: 平面向量数量积.

【思路点睛】几何图形中向量的数量积问题是近几年高考的又一热点, 作为一类既能考查向量的线性运算、坐标运算、数量积及平面几何知识, 又能考查学生的数形结合能力及转化与化归能力的问题, 实有其合理之处. 解决此类问题的常用方法是: ①利用已知条件, 结合平面几何知识及向量数量积的基本概念直接求解(较易); ②将条件通过向量的线性运算进行转化, 再利用①求解(较难); ③建系, 借助向量的坐标运算, 此法对解含垂直关系的问题往往有很好效果.

6、A

【解析】

令 $f(m) = g(n) = t$ ，进而求得 $n - m = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2$ ，再转化为函数的最值问题即可求解.

【详解】

$$\because f(m) = g(n) = t \therefore e^{\frac{m-1}{2}} = \ln \frac{n}{2} + 1 = t \quad (t > 0), \therefore n - m = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2,$$

$$\text{令: } h(t) = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2, \quad h'(t) = 2e^{t-1} - \frac{2}{t}, \quad h'(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上增,}$$

且 $h'(1) = 0$ ，所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上减，在 $(1, +\infty)$ 上增，

所以 $h(t)_{\min} = h(1) = 2 - 2 = 0$ ，所以 $n - m$ 的最小值为 0. 故选：A

【点睛】

本题主要考查了导数在研究函数最值中的应用，考查了转化的数学思想，恰当的用一个未知数来表示 n 和 m 是本题的关键，属于中档题.

7、C

【解析】

需结合抛物线第一定义和图形，得 $\triangle AFH$ 为等腰三角形，设准线与 x 轴的交点为 M ，过点 F 作 $FC \perp AH$ ，再由三角

$$\text{函数定义和几何关系分别表示转化出 } |BF| = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)},$$

$$|AF| = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}, \text{ 结合比值与正切二倍角公式化简即可}$$

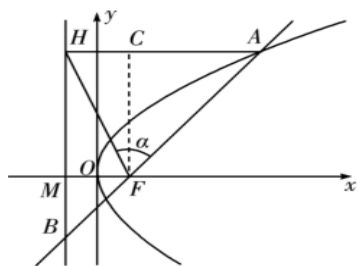
【详解】

如图，设准线与 x 轴的交点为 M ，过点 F 作 $FC \perp AH$. 由抛物线定义知 $|AF| = |AH|$ ，

$$\text{所以 } \angle AHF = \angle AFH = \alpha, \quad \angle FAH = \pi - 2\alpha = \angle OFB, \quad |BF| = \frac{|MF|}{\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)},$$

$$|AF| = \frac{|CF|}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{|CH| \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)},$$

$$\text{所以 } \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\pi - 2\alpha)} = \frac{\tan \alpha}{-\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2} = \frac{3}{2}.$$



故选：C

【点睛】

本题考查抛物线的几何性质，三角函数的性质，数形结合思想，转化与化归思想，属于中档题

8、B

【解析】

根据函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式求出函数 $g(x)$ 的解析式，再利用正弦函数的对称性、单调区间等相关性质求解即可.

【详解】

因为 $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 1 = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{3}) + 1$ ，由 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换公式知，

函数 $g(x) = 2 \sin[3(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] + 1 = 2 \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 1$ ，其最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，故②正确；

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，得 $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，所以 $x = \frac{5\pi}{9}$ 不是对称轴，故①错误；

令 $3x + \frac{\pi}{6} = k\pi$ ，得 $x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{18}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，取 $k=2$ ，得 $x = \frac{11\pi}{18}$ ，故函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称，故③正确；

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 3x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，得 $\frac{2k\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$ ，取 $k=2$ ，得 $\frac{10\pi}{9} \leq x \leq \frac{13\pi}{9}$ ，取 $k=3$ ，得 $\frac{16\pi}{9} \leq x \leq \frac{19\pi}{9}$ ，故④错误；

故选：B

【点睛】

本题考查 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的平移变换和正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等性质；考查运算求解能力和整体代换思想；熟练掌握正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等相关性质是求解本题的关键；属于中档题、常考题型

9、C

【解析】

根据等差数列和等比数列的定义进行判断即可.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/576001053232011003>