

第九章 质点动力学的基本方程

质点的运动微分方程

同学们好，本次课我们来讲质点的运动微分方程。

目录



1

矢量形式

2

直角坐标形式

3

自然轴系

4

质点动力学的两类问题

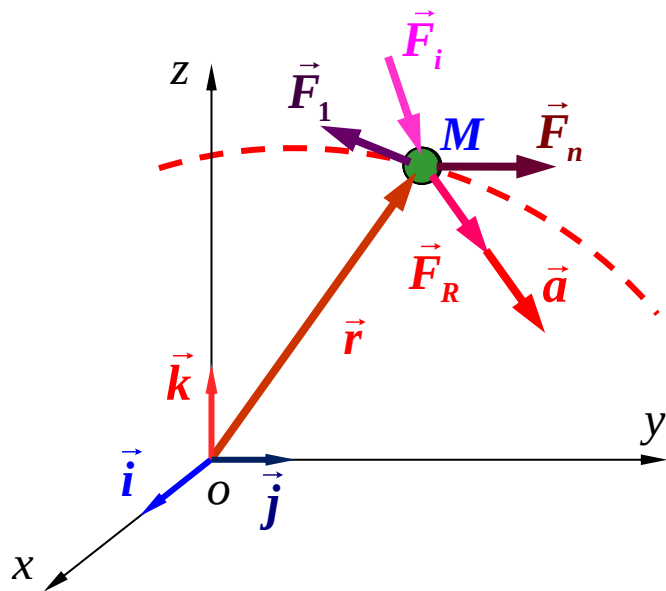
本节我们要建立质点运动微分方程的三种形式，矢量形式、直角坐标形式和自然轴系形式。在这个基础上，来解决动力学的两类问题。

1. 矢量形式的质点运动微分方程

若质点 M 的质量为 m ，受 n 个力作用， $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ，根据牛顿第二定律

则有

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{或} \quad m\vec{a} = \vec{F}_R$$



首先来看，矢量形式的质点运动微分方程。假若质点 M 的质量为 m ，受 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ n 个力作用，做这样的运动轨迹， M 点的位置矢径为 r 。那么根据牛顿第二定律，质点的质量 m 与加速度的成绩应当等于这 n 个力的矢量和。对于汇交力学，这 n 个力的矢量和就是他们的合力，因此又可以写成。。。

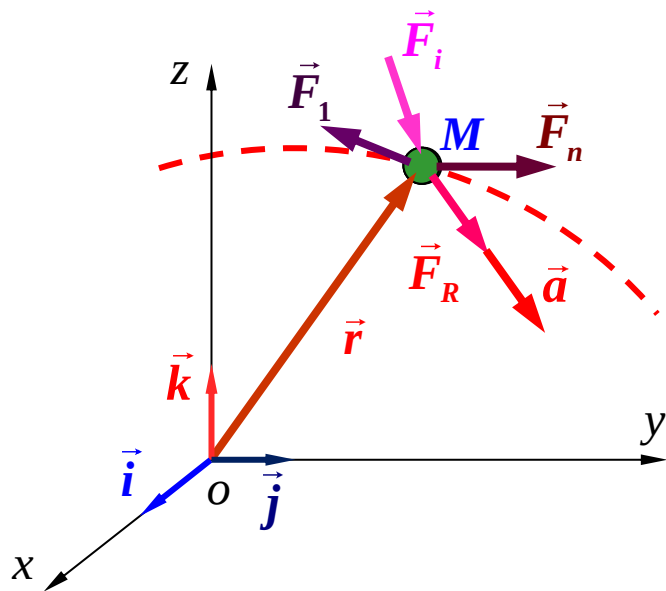
$$m \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

而

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

则

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$



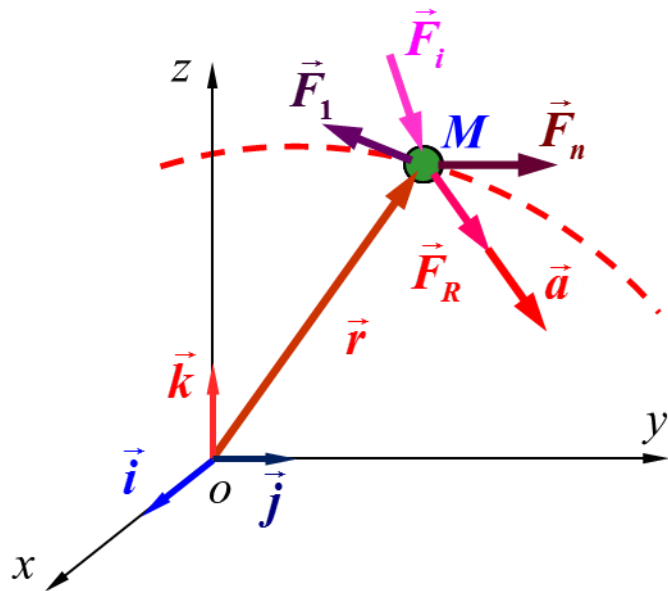
由点的运动学我们知道，点的加速度等于位置矢径 r 的二阶导数，因此，上述表达式又可以改写成质量与位置矢径二阶导数的乘积，等于质点所受外力的矢量和。这个表达式就是质点运动微分方程的矢量形式。

2.直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$$



在矢量表达式的基础上，我们再来看直角坐标形式的运动微分方程。首先将表达式中的位置矢径和外力写成解析表达式的形式，假设质点的坐标为 x, y, z ，那么位置矢径 $\vec{r}$ 就等于。。。。，外力 $\vec{F}_i$ 可以表示为。。。。。

将式 $m \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ 向坐标轴投影，得

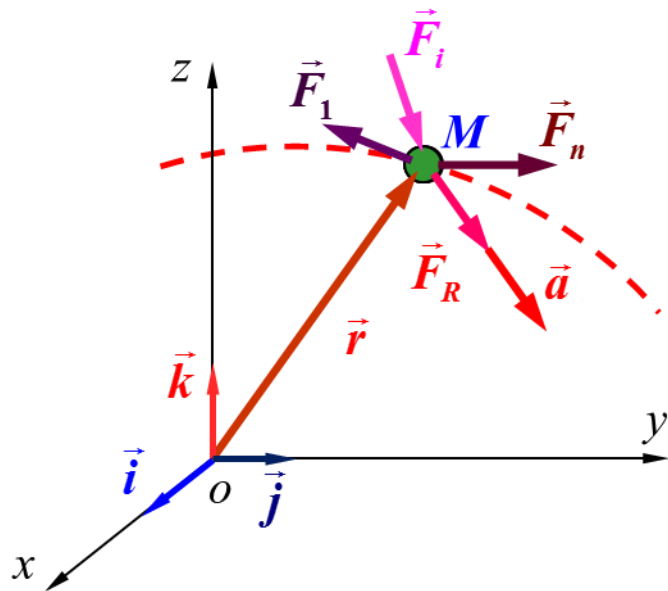
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$



$$m \ddot{x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_i F_{ix}$$

$$m \ddot{y} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum_i F_{iy}$$

$$m \ddot{z} = m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum_i F_{iz}$$

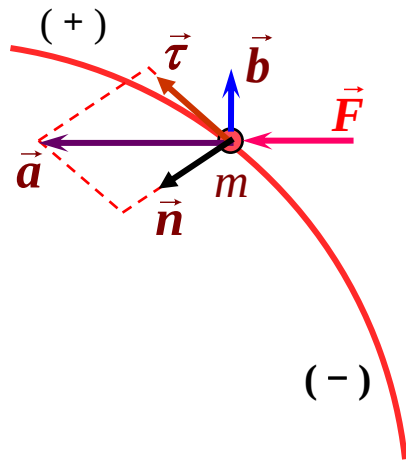


将上述解析表达式代入到矢量形式的运动微分方程中，注意 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为常矢量，求导之后等于0，通过分离坐标，可以得到直角坐标系下的运动微分方程，三个坐标方向对应三个投影方程。也就是说，质量与某个坐标方向的加速度乘积，等于所有外力在该方向投影的代数和。

3.自然轴系的质点运动微分方程

根据点的运动学知，质点的加速度在运动轨迹的密切面内，即

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$$



再来看自然轴系下的质点运动微分方程。在曲线轨迹上任意时刻位置建立自然轴系， τ 为切线方向， n 为主法线方向， b 为副法线方向。在力 F 作用下，产生加速度为 a ，根据点的运动学知，质点的加速度在运动轨迹的密切面内，副法线方向没有加速度。因此，加速度只有切向和主法线方向。其中切线方向的加速度 a 等于。。。，法向加速度等于。。。。。

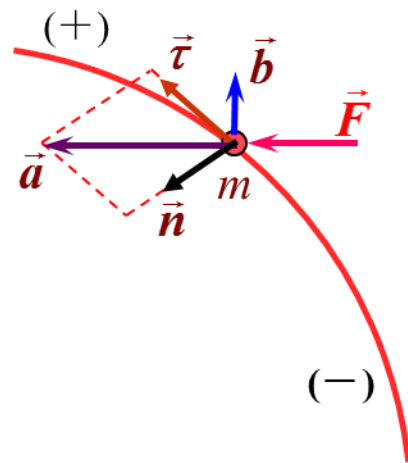
所以作用在该质点上力系的合力也应该在此密切面内，

则

$$m \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ti}$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{ni}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{bi}$$



由于加速度在密切面内，那么作用在该质点上力系的合力也应该在此密切面内。将加速度和外力向三个坐标方向投影可以得到三个投影表达式。其中外力在副法线方向投影的代数和应该等于0.

4.质点动力学的两类基本问题

第一类基本问题：已知质点的运动，求此质点所受的力。

特点：如果知道质点的运动规律，通过导数运算，求出该质点的速度和加速度，代入质点的运动微分方程，得一代数方程组，即可求解。

下面我们分析质点动力学的两类基本问题。第一类基本问题是已知质点的运动，求该质点所受的力。根据质点动力学微分方程可知。如果知道质点的运动规律，通过导数运算，求出该质点的速度和加速度，代入质点的运动微分方程，得一代数方程组，即可求出外力。

如：万有引力定律的发现。

哥白尼（1473—1543）的日心学说

开普勒（1571—1630）的三大定

律 顿（1642—1727）的牛顿定律和万有引力定律



比如万有引力定律的发现就是典型的已知运动求力的问题。万有引力定律是牛顿在1687年在《自然哲学的数学原理》著作上发表的。科学史上普遍认为，这一成果应该归功于伟大的牛顿。但是哥白尼日心说和开普勒的三大定律实际上是牛顿有能力确定运动定律和万有引力定律的基石。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/576024141015010051>