

第十一章 计数原理、概率、随机变量 及其分布

第五节 离散型随机变量及其分布列、均值与方差

内容概览

必备知识 · 逐点夯实



核心考点 · 分类突破



【课标解读】

【课程标准】

- 1.理解取有限个值的离散型随机变量及其分布列的概念.
- 2.理解并会求离散型随机变量的数字特征.

【核心素养】

数据分析、数学运算、逻辑推理.

【命题说明】

考向 考法	离散型随机变量的分布列是高考考查重点,常以实际问题为背景,与排列组合结合在一起交汇命题,各种题型均有考查.
预测	预计2025年高考仍会在离散型随机变量、分布列出题,其中期望与方差的应用命题更加灵活、多变.

必备知识 · 逐点夯实

[返回](#)

知识梳理·归纳

1. 离散型随机变量

一般地,对于随机试验样本空间 Ω 中的每个样本点 ω ,都有 唯一 的实数 $X(\omega)$ 与之对应,我们称 X 为随机变量;可能取值为有限个或可以一一列举的随机变量称为离散型随机变量.

2. 离散型随机变量的分布列

一般地,设离散型随机变量 X 的可能取值为 x_1, x_2, \dots, x_n ,称 X 取每一个值 x_i 的概率 $P(X=x_i)=p_i, i=1, 2, \dots, n$ 为 X 的概率分布列,简称分布列.

3. 离散型随机变量的分布列的性质

① $p_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n;$

② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \underline{1}.$

微点拨

分布列性质的两个作用

- (1)利用分布列中各事件概率之和为1可求参数的值.
- (2)随机变量 X 所取的值分别对应的事件是两两互斥的,利用这一点可以求相关事件的概率.

4. 离散型随机变量的均值与方差

一般地,若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

(1)均值: $E(X)=\frac{x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n}{\sum_{i=1}^n p_i}=\sum_{i=1}^n x_i p_i$ 为随机变量 X 的均值或数学期望,

数学期望简称期望.它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

(2)方差

$D(X)=(x_1-E(X))^2p_1+(x_2-E(X))^2p_2+\dots+(x_n-E(X))^2p_n=\sum_{i=1}^n(x_i-E(X))^2p_i$ 为随机变量 X 的方

差,并称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差,记为 $\sigma(X)$,它们都可以度量随机变量取值与其均值的偏离程度.

微点拨

(1) $E(X)$ 是一个实数,由 X 的分布列唯一确定.随机变量 X 是可变的,可取不同的值, $E(X)$ 描述 X 取值的平均状态.

(2)变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度,其中标准差与随机变量本身具有相同的单位.

5.均值与方差的性质

$$(1) E(aX+b) = \underline{aE(X)+b}.$$

$$(2) D(aX+b) = \underline{a^2D(X)} \quad (a,b \text{ 为常数}).$$

$$(3) E(X_1+X_2) = \underline{E(X_1)+E(X_2)}.$$

$$(4) D(X) = \underline{E(X^2)-(E(X))^2}.$$

$$(5) \text{若 } X_1, X_2 \text{ 相互独立, 则 } \underline{E(X_1X_2)=E(X_1) \cdot E(X_2)}.$$

基础诊断·自测

类型	辨析	改编	易错	高考
题号	1	2	4	3

1.(思考辨析)(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)在离散型随机变量的分布列中,随机变量取各个值的概率之和可以小于1.(×)

提示:离散型随机变量所有取值的并事件是必然事件,故各概率之和等于1.

(2)离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的.(√)

(3)如果随机变量 X 的分布列由下表给出,则它服从两点分布.(×)

X	2	5
P	0.3	0.7

提示: X 的取值不是0,1,故不是两点分布.

(4)方差或标准差越小,则随机变量的偏离程度越小.(√)

2.(选择性必修三P63例1改编)在篮球比赛中,罚球命中1次得1分,不中得0分.如果某篮球运动员罚球命中的概率为0.8,那么他罚球1次的得分 X 的均值为()

A.0.2 B.0.4 C.0.8 D.1

【解析】选C.某篮球运动员罚球1次的得分为 X , X 的取值可能为0,1,

$$P(X=0)=1-0.8=0.2,$$

$$P(X=1)=0.8,E(X)=0\times 0.2+1\times 0.8=0.8.$$

3. (2020·全国III卷) 在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 , 且

$\sum_{i=1}^n p_i = 1$, 则下面四种情形中, 对应样本的标准差最大的一组是()

A. $p_1 = p_4 = 0.1, p_2 = p_3 = 0.4$

B. $p_1 = p_4 = 0.4, p_2 = p_3 = 0.1$

C. $p_1 = p_4 = 0.2, p_2 = p_3 = 0.3$

D. $p_1 = p_4 = 0.3, p_2 = p_3 = 0.2$

【解析】 选B. 对于A, 该组数据的平均数为 $(1+4)\times 0.1+(2+3)\times 0.4=2.5$,
方差为 $(1-2.5)^2\times 0.1+(2-2.5)^2\times 0.4+(3-2.5)^2\times 0.4+(4-2.5)^2\times 0.1=0.65$;
对于B, 该组数据的平均数为 $(1+4)\times 0.4+(2+3)\times 0.1=2.5$,
方差为 $(1-2.5)^2\times 0.4+(2-2.5)^2\times 0.1+(3-2.5)^2\times 0.1+(4-2.5)^2\times 0.4=1.85$;
对于C, 该组数据的平均数为 $(1+4)\times 0.2+(2+3)\times 0.3=2.5$,
方差为 $(1-2.5)^2\times 0.2+(2-2.5)^2\times 0.3+(3-2.5)^2\times 0.3+(4-2.5)^2\times 0.2=1.05$;
对于D, 该组数据的平均数为 $(1+4)\times 0.3+(2+3)\times 0.2=2.5$,
方差为 $(1-2.5)^2\times 0.3+(2-2.5)^2\times 0.2+(3-2.5)^2\times 0.2+(4-2.5)^2\times 0.3=1.45$.
所以B这一组的标准差最大.

4.(均值性质应用错误)已知随机变量 X 的分布列如表:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

若 $Y=2X+3$,则 $E(Y)$ 的值为 $\frac{7}{3}$.

【解析】 $E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$,

则 $E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3}$.

核心考点 · 分类突破

[返回](#)

考点一 离散型随机变量分布列的性质

[例1](1)随机变量 X 的概率分布规律为 $P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}$ ($n=1,2,3,4$),其中 a 为常数,

则 $P(\frac{5}{4}<X<\frac{13}{4})$ 的值为()

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{5}{16}$

【解析】选D. 因为 $P(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}$ ($n=1,2,3,4$),所以 $\frac{a}{2}+\frac{a}{6}+\frac{a}{12}+\frac{a}{20}=1$,所以 $a=\frac{5}{4}$.

所以 $P(\frac{5}{4}<X<\frac{13}{4})=P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{4}\times\frac{1}{12}=\frac{5}{16}$.

(2) 设 X 是一个离散型随机变量, 其分布列为
 则 q 的值为()

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$2-3q$	q^2

A. 1

B. $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{6}$

C. $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{6}$

D. $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{33}}{6}$

【解析】选C. 由分布列的性质知
$$\begin{cases} 0 \leq 2-3q \leq \frac{2}{3}, \\ 0 \leq q^2 \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{3} + 2-3q + q^2 = 1, \end{cases} \quad \text{解得 } q = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{33}}{6}.$$

解题技法

离散型随机变量分布列的性质的应用

- (1)利用“概率之和为1”可以求相关参数的值.
- (2)利用“在某个范围内的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和”求某些特定事件的概率.
- (3)可以根据性质判断所得分布列结果是否正确.

对点训练

1. 若随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

则当 $P(X < a) = 0.8$ 时, 实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2]$

B. $[1, 2]$

C. $(1, 2]$

D. $(1, 2)$

【解析】 选C. 由随机变量 X 的分布列知, $P(X < 1) = 0.5$, $P(X < 2) = 0.8$,

故当 $P(X < a) = 0.8$ 时, 实数 a 的取值范围是 $(1, 2]$.

2. 设随机变量 X 满足 $P(X=i) = \frac{k}{2^i} (i=1,2,3)$, 则 $k = \frac{8}{7}$; $P(X \geq 2) = \frac{3}{7}$.

【解析】 由已知得随机变量 X 的分布列为

所以 $\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} = 1$, 所以 $k = \frac{8}{7}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	k	k	k

X	1	2	3
P	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

所以 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$.

3. 随机变量 X 的分布列如下:

X	-1	0	1
P	a	b	c

其中 a, b, c 成等差数列, 则 $P(|X|=1) = \frac{2}{3}$, 公差 d 的取值范围是 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

【解析】 因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $2b = a + c$.

又 $a + b + c = 1$, 所以 $b = \frac{1}{3}$, 所以 $P(|X|=1) = a + c = \frac{2}{3}$.

又 $a = \frac{1}{3} - d, c = \frac{1}{3} + d$,

根据分布列的性质, 得 $0 \leq \frac{1}{3} - d \leq \frac{2}{3}, 0 \leq \frac{1}{3} + d \leq \frac{2}{3}$, 所以 $-\frac{1}{3} \leq d \leq \frac{1}{3}$.

【加练备选】

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(1)求 $2X+1$ 的分布列;

【解析】 (1)由分布列的性质知, $0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$,得 $m=0.3$.

列表为

X	0	1	2	3	4
$2X+1$	1	3	5	7	9

从而 $2X+1$ 的分布列为

$2X+1$	1	3	5	7	9
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	0.2	0.1	0.1	0.3	m

(2)求随机变量 $\eta=|X-1|$ 的分布列.

【解析】 (2)由(1)知 $m=0.3$,列表为

X	0	1	2	3	4
η	1	0	1	2	3

所以 $P(\eta=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.2+0.1=0.3, P(\eta=0)=P(X=1)=0.1,$

$P(\eta=2)=P(X=3)=0.3, P(\eta=3)=P(X=4)=0.3,$ 故 $\eta=|X-1|$ 的分布列为

η	0	1	2	3
P	0.1	0.3	0.3	0.3

考点二 均值与方差的简单计算

[例2](1)(多选题)已知随机变量 X 的分布列为
下列结论正确的有()

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	m	$3m$

A. $m = \frac{1}{6}$

B. $E(X) = \frac{1}{6}$

C. $E(2X-1) = \frac{1}{3}$

D. $D(X) = \frac{29}{36}$

【解析】选ABD. 由分布列的性质得, $\frac{1}{3} + 4m = 1$, 解得 $m = \frac{1}{6}$, 故A正确;

$E(X) = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, 故B正确; $E(2X-1) = 2E(X) - 1 = -\frac{2}{3}$, 故C不正确;

$D(X) = \frac{1}{3} \times (-1 - \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{6} \times (0 - \frac{1}{6})^2 + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{6})^2 = \frac{29}{36}$, 故D正确.

(2)(多选题)设离散型随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3	4
P	q	0.4	0.1	0.2	0.2

若离散型随机变量 Y 满足 $Y=2X+1$,则下列结果正确的有()

A. $q=0.1$

B. $E(X)=2, D(X)=1.4$

C. $E(X)=2, D(X)=1.8$

D. $E(Y)=5, D(Y)=7.2$

【解析】 选ACD. 因为 $q+0.4+0.1+0.2+0.2=1$, 所以 $q=0.1$, 故A正确;

又 $E(X)=0\times 0.1+1\times 0.4+2\times 0.1+3\times 0.2+4\times 0.2=2$, $D(X)=$

$(0-2)^2\times 0.1+(1-2)^2\times 0.4+(2-2)^2\times 0.1+(3-2)^2\times 0.2+(4-2)^2\times 0.2=1.8$, 故C正确, B错误;

因为 $Y=2X+1$, 所以 $E(Y)=2E(X)+1=5$, $D(Y)=4D(X)=7.2$, 故D正确.

(3) 已知随机变量 X 的分布列如表:

X	a	2	3	4
P	1	b	1	1

若 $E(X)=2$, 则 $a=$ 0, $D(X)=$ $\frac{5}{2}$.

【解析】 由题意知, $\frac{1}{3}+b+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=1$, 所以 $b=\frac{1}{4}$.

又 $E(X)=a \times \frac{1}{3}+2 \times \frac{1}{4}+3 \times \frac{1}{6}+4 \times \frac{1}{4}=2$, 解得 $a=0$,

所以 $D(X)=(0-2)^2 \times \frac{1}{3}+(2-2)^2 \times \frac{1}{4}+(3-2)^2 \times \frac{1}{6}+(4-2)^2 \times \frac{1}{4}=\frac{5}{2}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/576031023022010144>